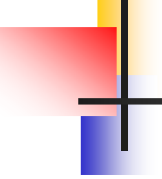


Equacions de Maxwell
i

Ones Electromagnètiques

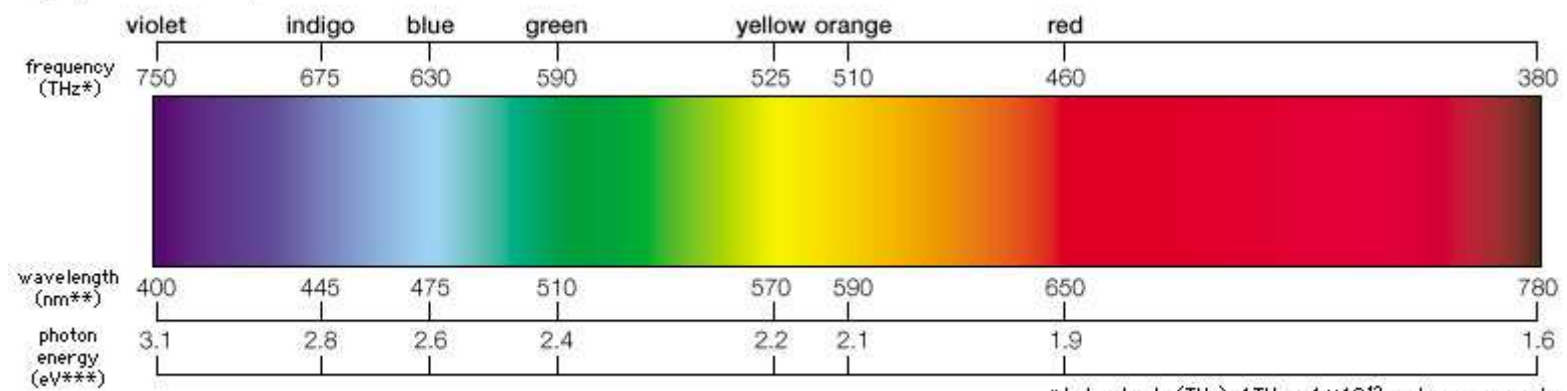
- 
- Lleis dels camps $\vec{E}$ i $\vec{B}$ en general
 - Ademeten una solució ondulatòria propagant, amb velocitat c

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \quad 30-1$$

THE SPEED OF ELECTROMAGNETIC WAVES



Light, the visible spectrum



© 2006 Encyclopædia Britannica, Inc.

* In terahertz (THz); 1THz = 1×10^{12} cycles per second.
 ** In nanometres (nm); 1nm = 1×10^{-9} metre.
 *** In electron volts (eV).

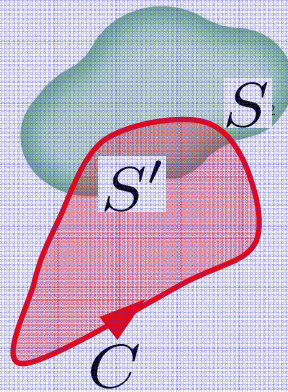
Les equacions de Maxwell

□ En situacions estàtiques es desacoblen $\vec{E}$ i $\vec{B}$

ELECTROSTÀTICA

$$\text{I} \quad \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

$$\text{II} \quad \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$$



S : Superfície tancada

C : corba tancada

S' : superfície amb frontera C

MAGNETOSTÀTICA

$$\text{III} \quad \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$$

$$\text{IV} \quad \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{S'}$$

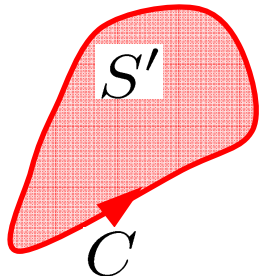
$$I_{S'} = \int_{S'} \vec{j} \cdot d\vec{s}$$

□ La I llei és vàlida en general (**Ilei de Gauss**)

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

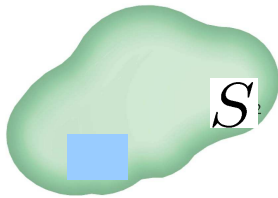


- La II llei en situacions dinàmiques és (**Ilei de Faraday**)



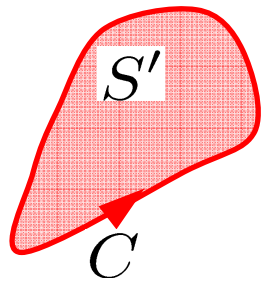
$$\mathcal{E} = -\frac{d}{dt}\phi$$
$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \int_{S'} \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

- La III llei és vàlida en general



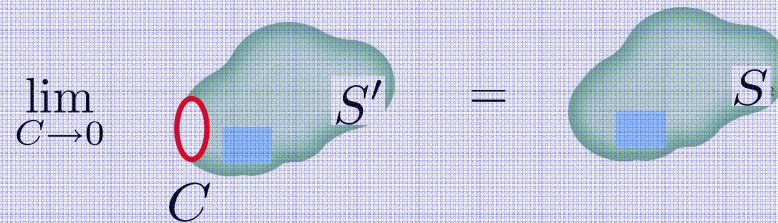
$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$$

- Maxwell va demostrar que la IV llei general **no** pot ser la llei d'Ampere de la magnetostàtica



$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{S'} \quad \text{No és vàlida en situacions dinàmiques}$$

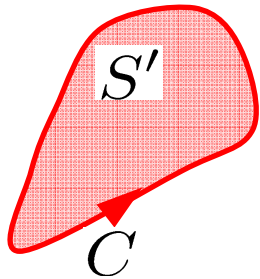
Si fos certa en general:



$$\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{s} = -\frac{dQ_{\text{int}}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dQ_{\text{int}}}{dt} = -\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{s} = -\frac{1}{\mu_0} \oint_{C \rightarrow 0} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

Q_{int} no podria canviar mai !?!

La IV llei de Maxwell



$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{S'} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \underbrace{\int_{S'} \vec{E} \cdot d\vec{s}}_{\text{Flux de camp elèctric per } S'}$$

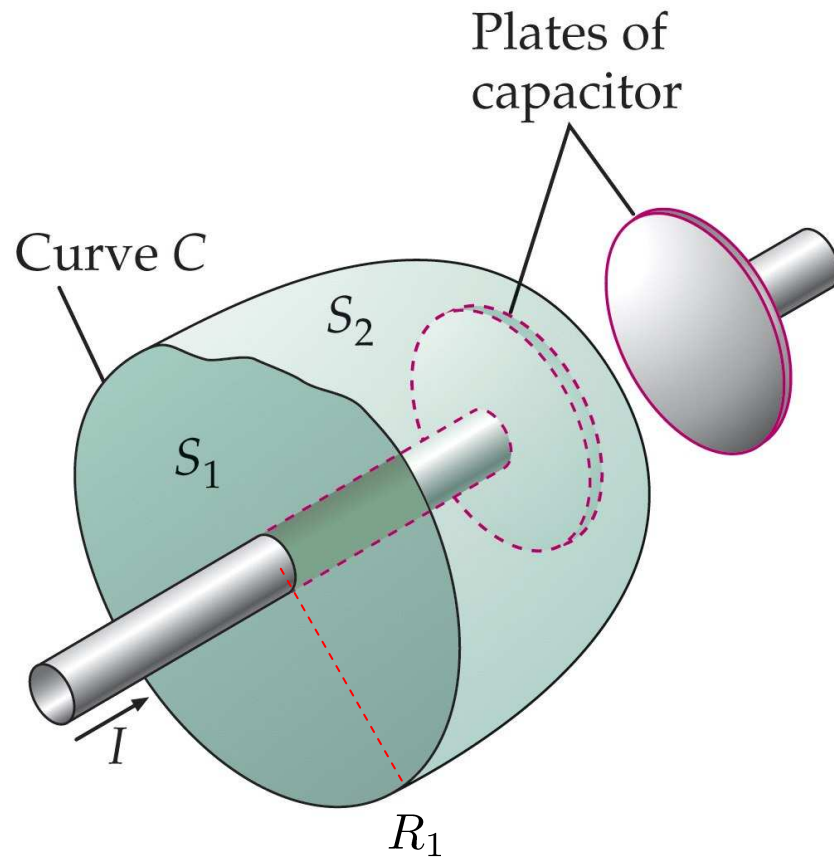
$$c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \quad c: \text{constant amb dimensions de velocitat}$$

$\lim_{C \rightarrow 0} \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 0$

$\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{s} = -\frac{dQ_{\text{int}}}{dt} \rightarrow \frac{dQ_{\text{int}}}{dt} = -\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{s} = -\underbrace{\frac{1}{\mu_0} \oint_{C \rightarrow 0} \vec{B} \cdot d\vec{\ell}}_0 + \epsilon_0 \frac{d}{dt} \underbrace{\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s}}_{Q_{\text{int}}/\epsilon_0} = \frac{dQ_{\text{int}}}{dt}$

IV llei i càrrega d'un condensador

El nou terme evita incoherències



$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{S'} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_{S'} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

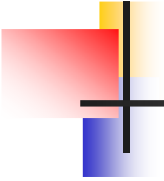
C i S_1 :

$$B 2\pi R_1 = \mu_0 I \quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R_1}$$

C i S_2 :

$$\begin{aligned} B 2\pi R_1 &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} \\ &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \oint_{S_1 + S_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \frac{dQ_{\text{int}}}{dt} \end{aligned}$$

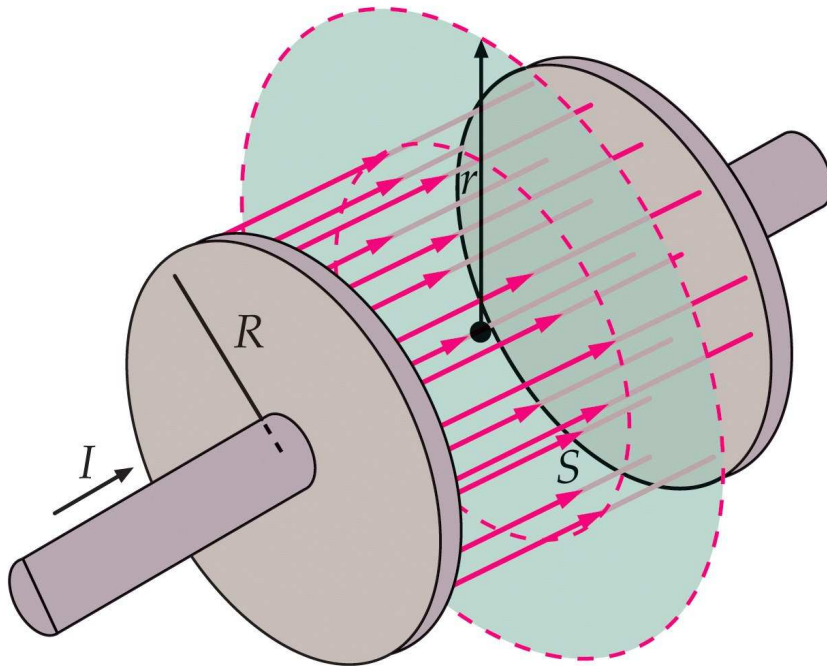
$$B 2\pi R_1 = \mu_0 I \quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R_1}$$


$$I_d = \epsilon_0 \frac{d\phi_e}{dt} \quad 30-3$$

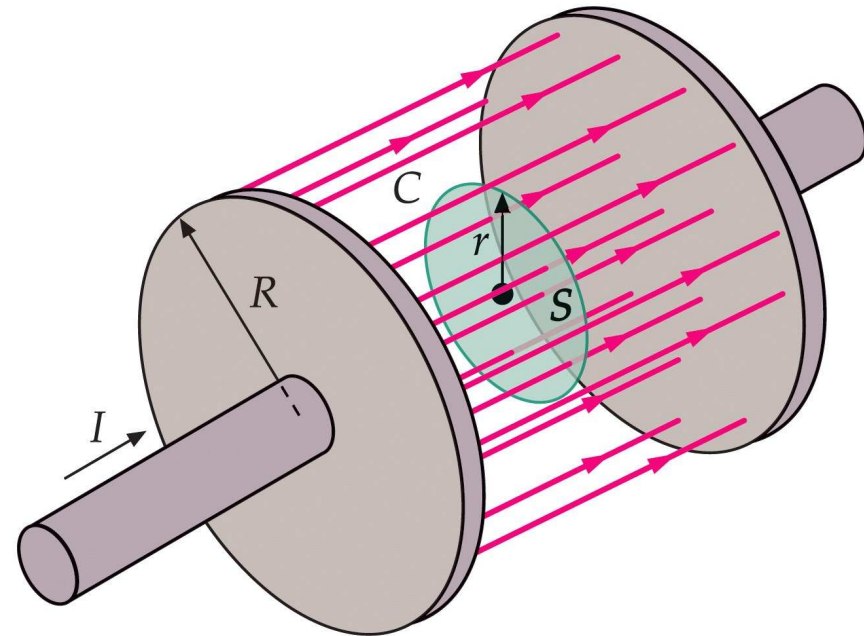
DEFINITION—DISPLACEMENT CURRENT

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0(I + I_d) = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\phi_e}{dt} \quad 30-4$$

GENERALIZED FORM OF AMPÈRE'S LAW



$$\begin{aligned} I_d &= \epsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt} = \epsilon_0 A \frac{dE}{dt} \\ &= \epsilon_0 A \frac{d}{dt} \left(\frac{Q}{A\epsilon_0} \right) = \frac{dQ}{dt} \end{aligned}$$



$$B 2\pi r = \mu_0 \frac{dQ}{dt} \frac{r^2}{R^2}$$

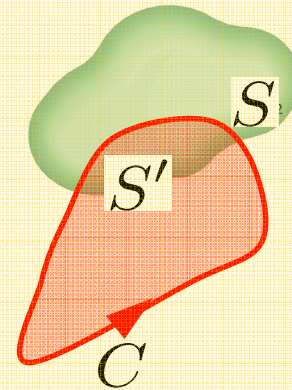
Les lleis de Maxwell

$$\text{I} \quad \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

$$\text{II} \quad \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \int_{S'} \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

$$\text{III} \quad \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$$

$$\text{IV} \quad \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{S'} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_{S'} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$



S : Superfície tancada
amb volum interior V

C : corba tancada

S' : superfície amb frontera C

$$Q_{\text{int}} = \int_V \rho \, dv$$

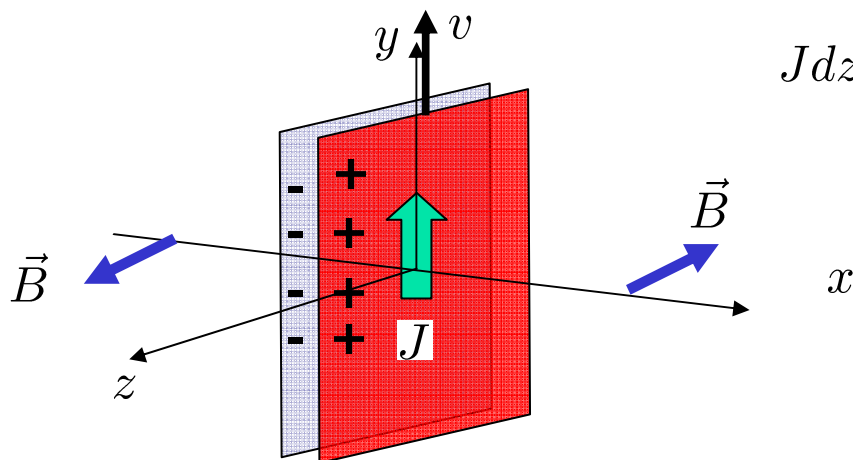
$$I_{S'} = \int_{S'} \vec{j} \cdot d\vec{s}$$

També es poden formular com relacions locals

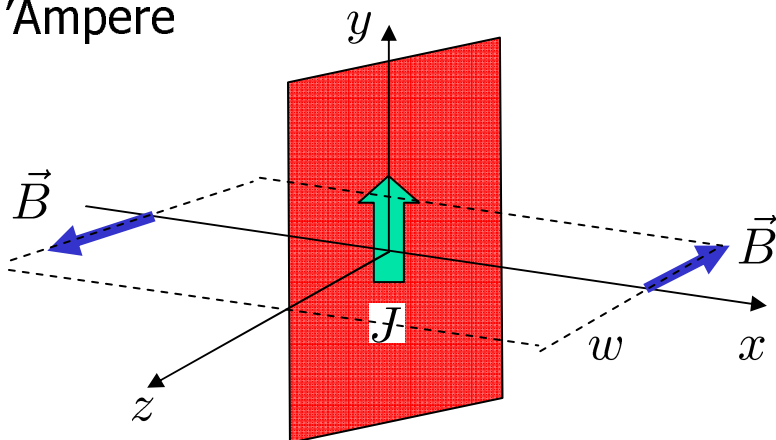
El full de corrent estacionari

J : densitat de corrent al pla yz

Jdz : corrent per dz



Llei d'Ampere

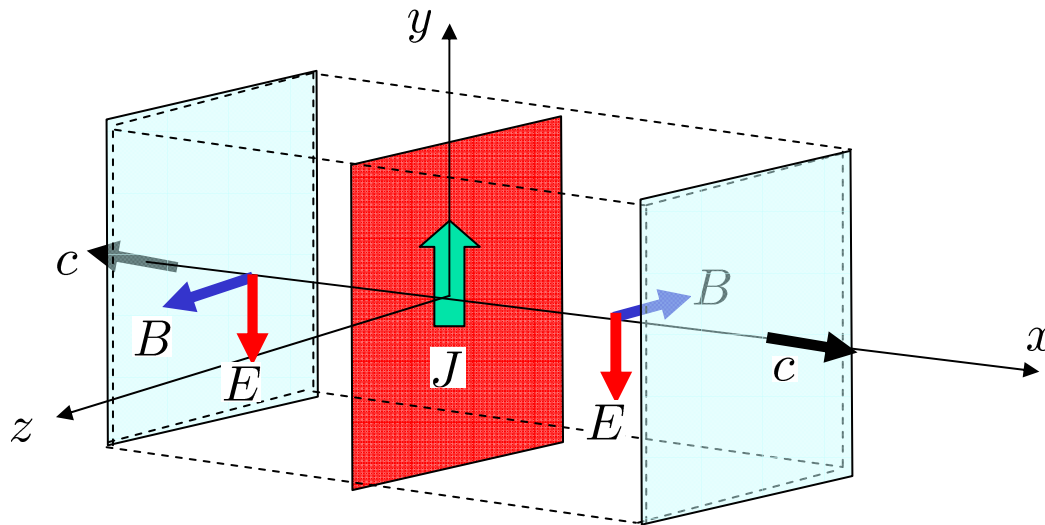


$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{S'}$$

$$2Bw = \mu_0 Jw$$

$$B = \frac{\mu_0}{2} J$$

El full de corrent: solució depenent del temps



Posició dels fronts

$$x_{\text{front}} = \pm ct$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

camps

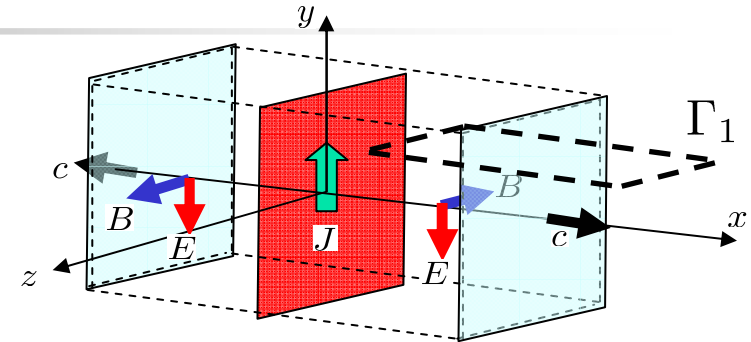
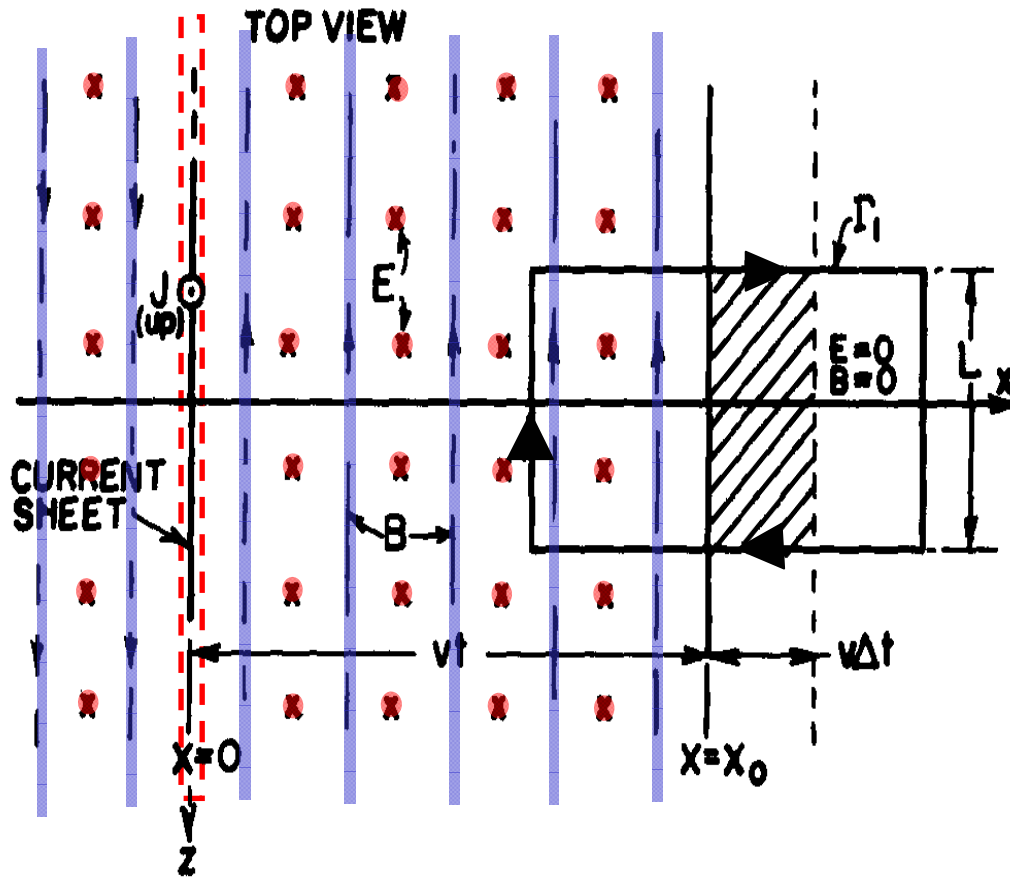
$$B = \frac{\mu_0}{2} J$$

$$E = cB = c \frac{\mu_0}{2} J$$

Es solució? Verifica les lleis?

La I i la III llei es verifiquen ja que els camps són uniformes

La IV llei



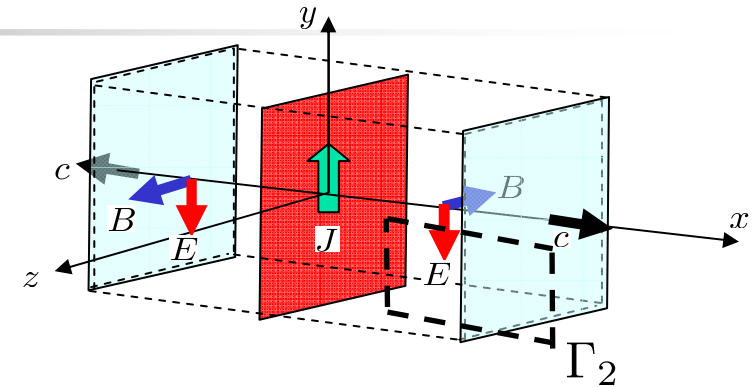
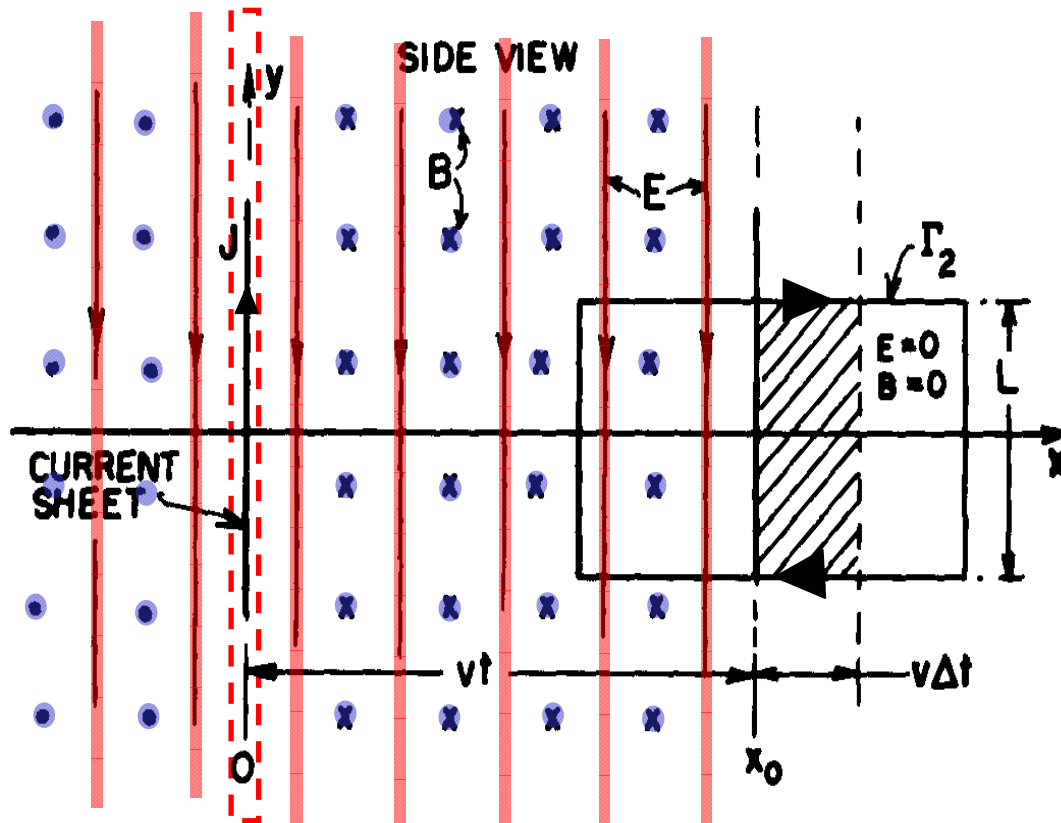
$$\oint_{\Gamma_1} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_S + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$BL = 0 + \mu_0 \epsilon_0 EL \frac{d}{dt} (x_{\text{front}} - x_{\text{min}})$$

$$BL = \mu_0 \epsilon_0 ELc$$

$$B = \frac{E}{c}$$

La II lei



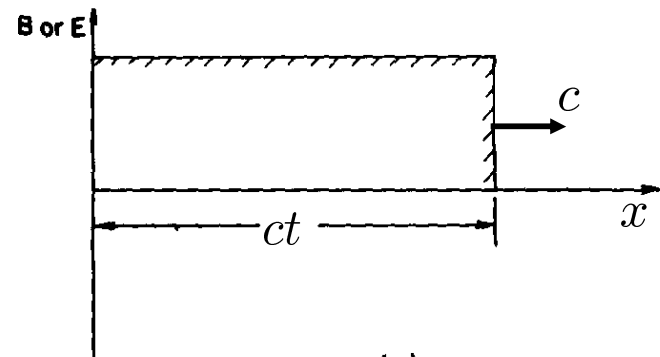
$$\oint_{\Gamma_2} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

$$-EL = -BL \frac{d}{dt} (x_{\text{front}} - x_{\text{min}})$$

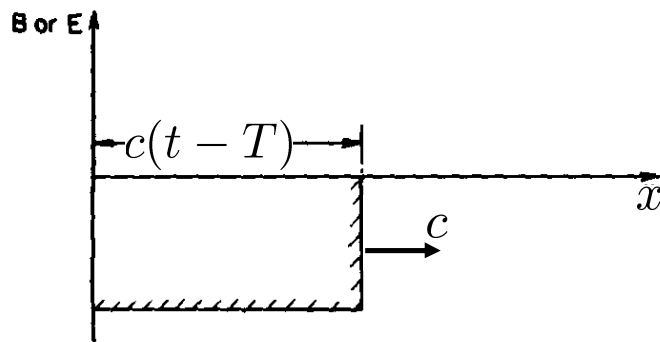
$$E = Bc$$

Es verifiquen totes les lleis

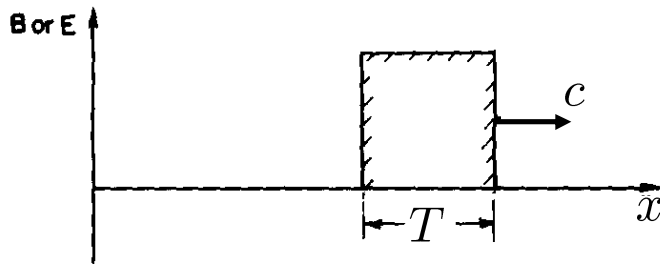
“L'eruga es transforma en papallona”



(a)

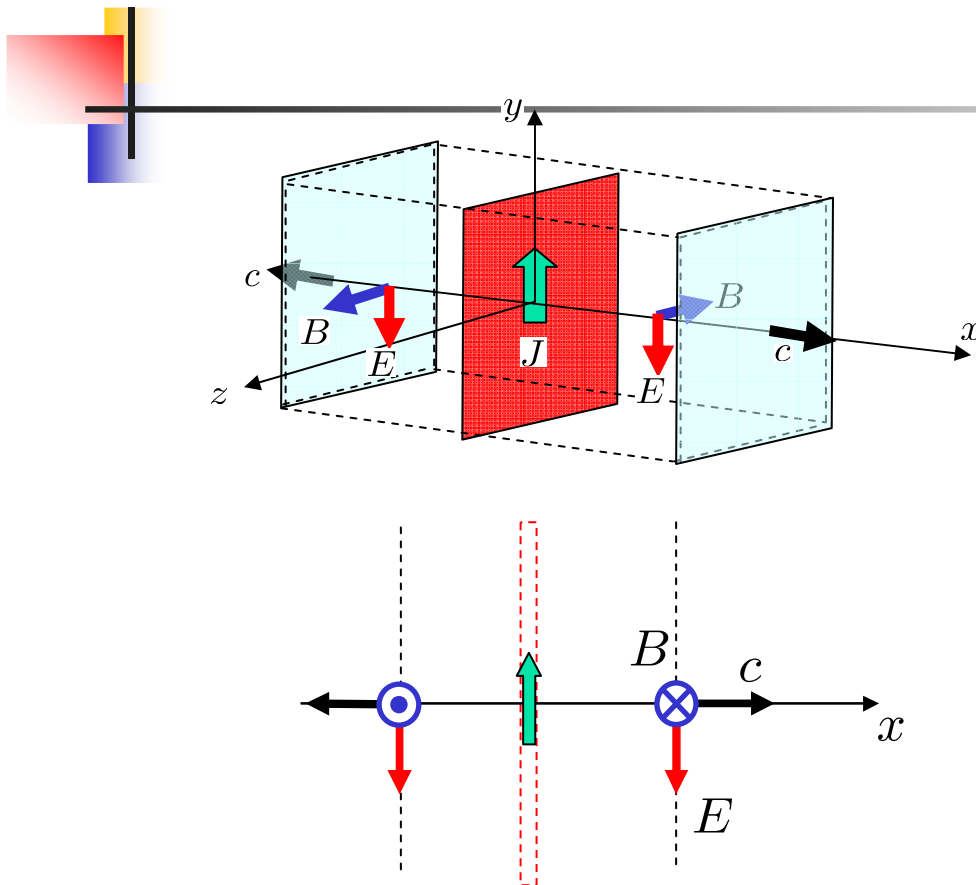


(b)



(c)

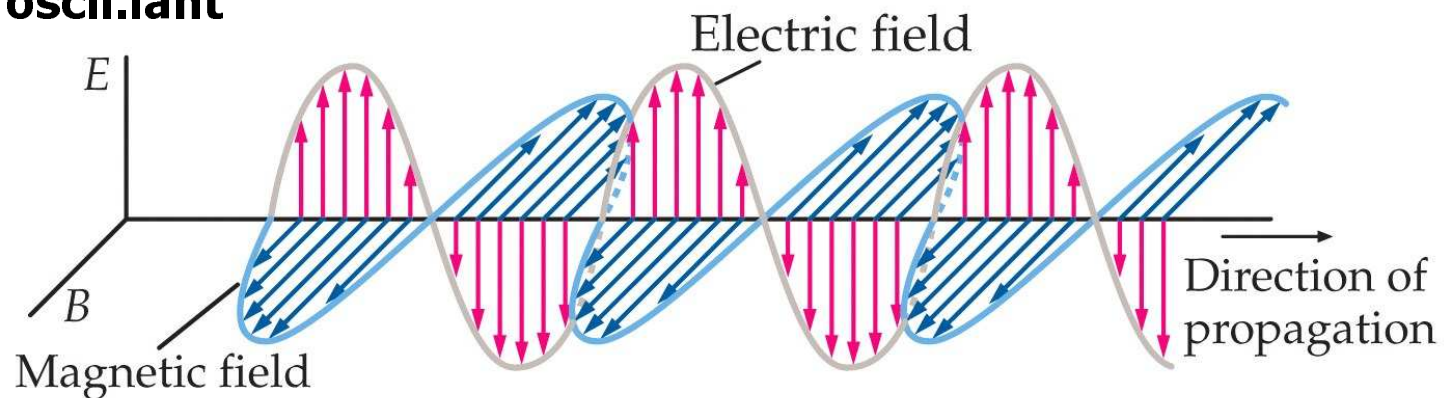
Fig. 18-4. (a) The magnitude of B (or E) as a function of x at the time t after the charge sheet is set in motion. (b) The fields for a charge sheet set in motion, toward negative y at $t = T$. (c) The sum of (a) and (b).



Característiques de les ones EM

- $\vec{E}$ i $\vec{B}$ perpendiculars
- $\vec{E} \times \vec{B}$ dóna el sentit de propagació
- $E = cB$
- Propagació al buit, sense necessitat de càrregues ni corrents

"El full oscil.lant"



L'equació d'ones

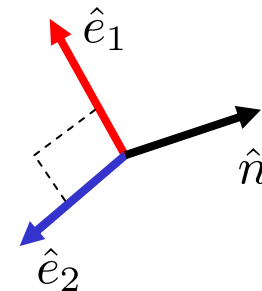
$$\nabla^2 = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2} \quad \text{Laplaciana}$$

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \vec{E}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E}(\vec{r}, t) &= 0 \\ \nabla^2 \vec{B}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{B}(\vec{r}, t) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Solució propagant polaritzada linealment

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \hat{e}_1 f(\hat{n} \cdot \vec{r} - ct)$$

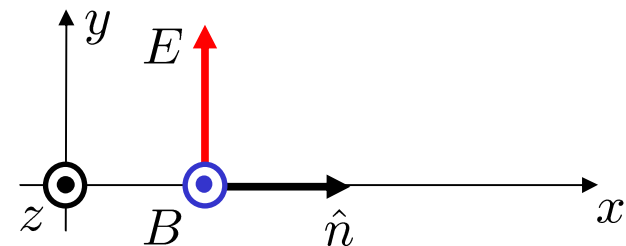
$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \hat{e}_2 \frac{1}{c} f(\hat{n} \cdot \vec{r} - ct)$$



Exemple: propagació eix x , polarització eix y

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \hat{u}_y f(x - ct)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \hat{u}_z \frac{1}{c} f(x - ct)$$



Ona harmònica polaritzada linealment

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \hat{e}_1 \sin [k(\hat{n} \cdot \vec{r} - ct)] = \hat{e}_1 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

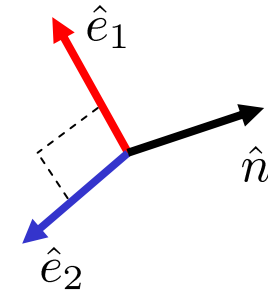
$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \hat{e}_2 \frac{1}{c} \sin [k(\hat{n} \cdot \vec{r} - ct)] = \hat{e}_2 \frac{1}{c} \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

$$\vec{k} = k \hat{n}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\omega = ck$$

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$$



Velocitat de propagació de la fase

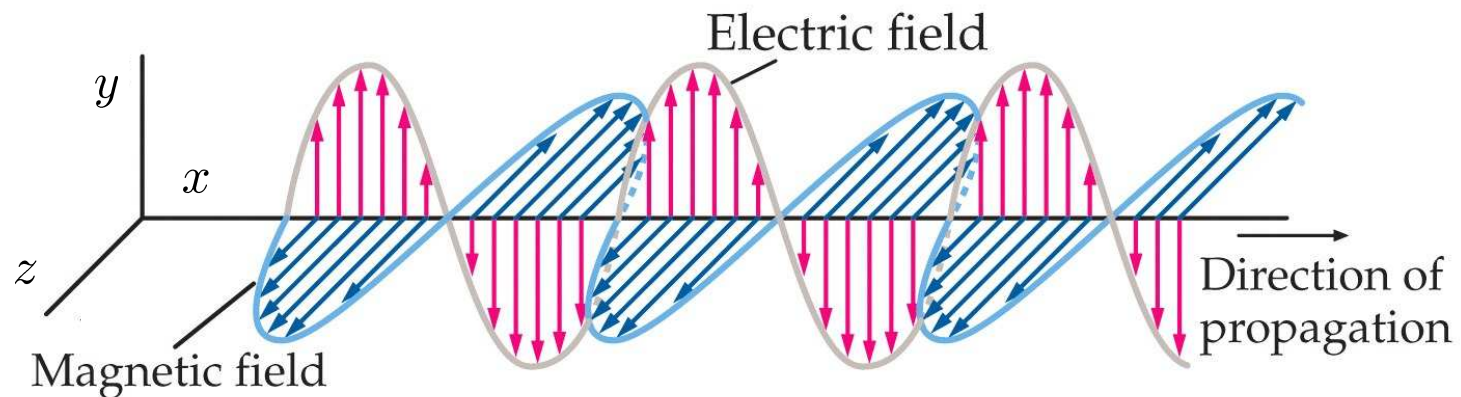
$$v = \frac{\omega}{k} = c \quad \text{No dispersiu}$$

Velocitat de grup $v_g = \frac{d\omega}{dk} = c$

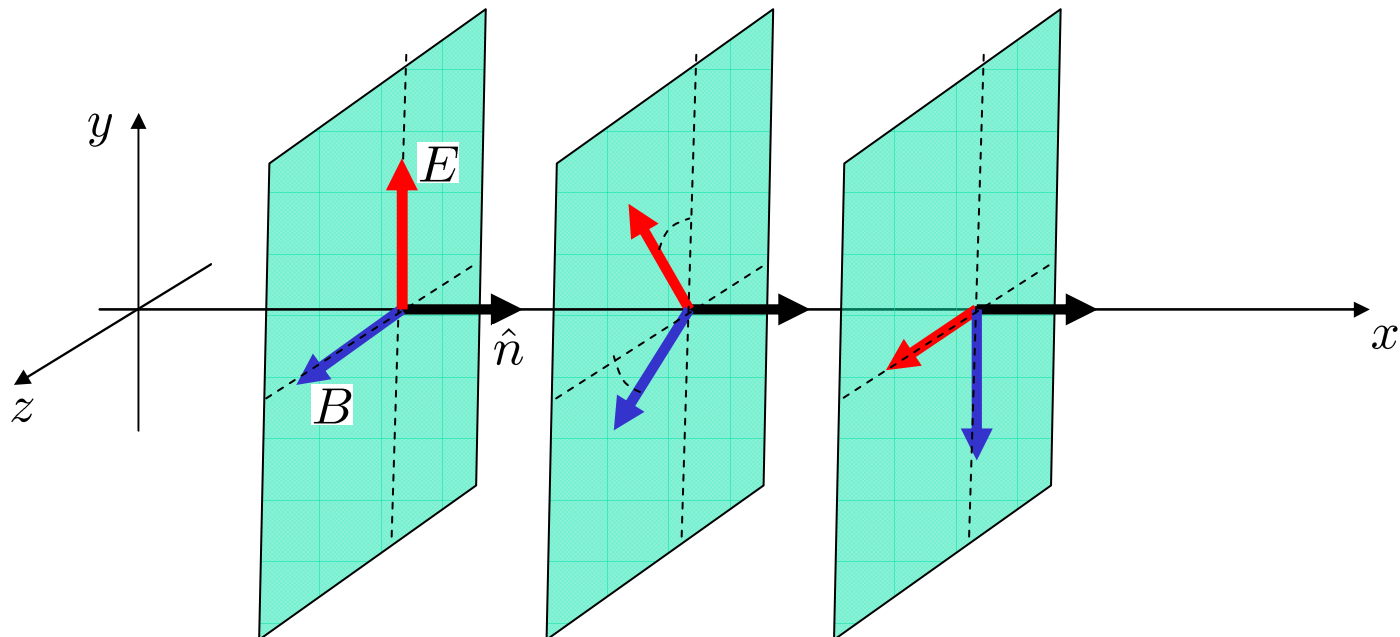
Exemple **d'ona harmònica polaritzada linealment:**
propagació eix x , polarització eix y

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \hat{u}_y \sin [k(x - ct)] = \hat{u}_y \sin(kx - \omega t)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \hat{u}_z \frac{1}{c} \sin [k(x - ct)] = \hat{u}_z \frac{1}{c} \sin(kx - \omega t)$$



Exemple **d'ona harmònica polaritzada circularment**
El camp elèctric va girant



Ones planes: front d'ona pla
també esfèriques, cilíndriques, ...

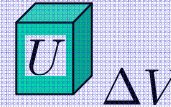
Energia de les ones EM

Ona EM $E = cB$

$$u_B = u_E = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$$

$$u = u_B + u_E = \epsilon_0 E^2$$

Densitats d'energia dels camps EM



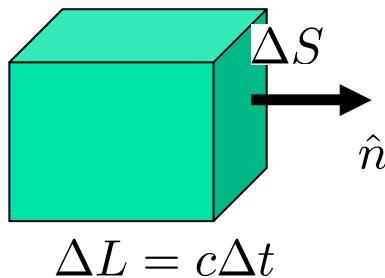
$$U = u \Delta V$$

↑ densitat d'energia

$$u_E = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$$

$$u_B = \frac{1}{2}\epsilon_0 c^2 B^2$$

Intensitat $\mathcal{I}$ de l'ona EM



Energia que atravessa la unitat d'àrea normal al sentit de propagació per unitat de temps

$$U = u \Delta S \Delta L = uc \Delta S \Delta t$$

$$\mathcal{I} \equiv \frac{U}{\Delta S \Delta t} = uc$$

$$\mathcal{I} = \epsilon_0 c E^2$$

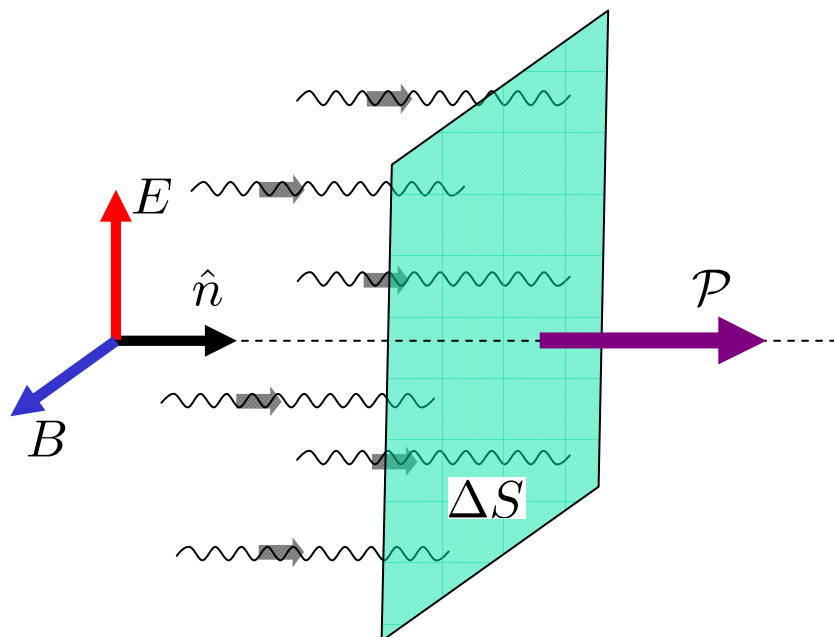
$$E = E_{\max} \cos(\omega t)$$

$$\mathcal{I}_m = \frac{1}{2}\epsilon_0 c E_{\max}^2$$

valor mitjà

El vector de Poynting

Per a una ona EM



$$\vec{\mathcal{P}} = \epsilon_0 c^2 \vec{E} \times \vec{B}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \vec{\mathcal{P}} \parallel \hat{n} \\ \bullet \mathcal{P} = \epsilon_0 c E^2 = \mathcal{I} \end{array} \right.$$

El camp vectorial de Poynting dóna la direcció en que es propaga l'energia EM i el seu flux per a una superfície és l'intensitat d'energia que l'atravessa.

$$\mathcal{I} \equiv \frac{U}{\Delta S \Delta t} = \int_{\Delta S} \vec{\mathcal{P}} \cdot d\vec{s}$$

Moment lineal de la radiació EM

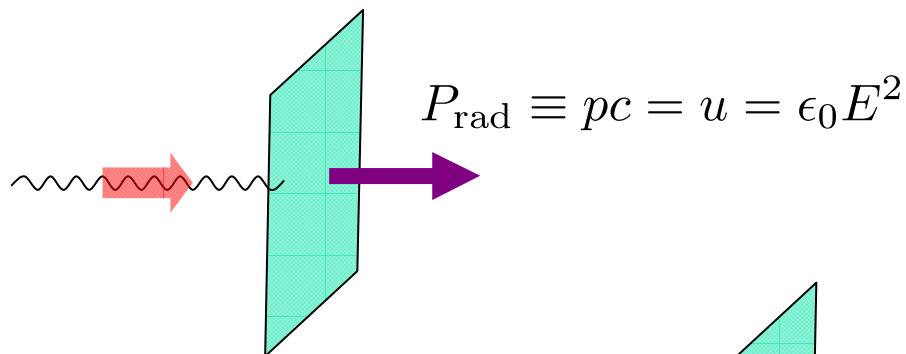
A més d'energia, les ones EM també transporten moment

dualitat ona-partícula

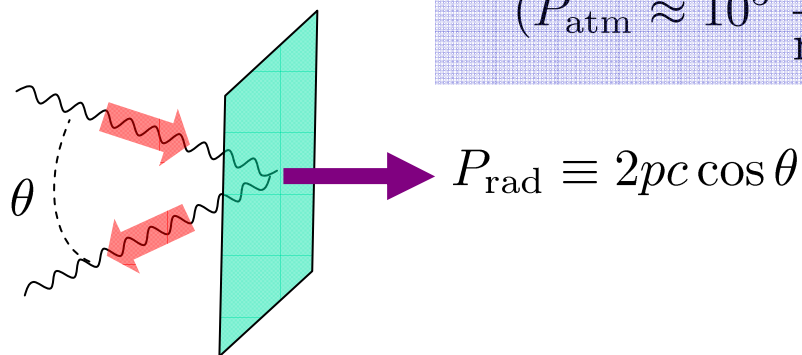
$$\vec{p} = \frac{u}{c} \hat{n} = \epsilon_0 \vec{E} \times \vec{B}$$

La pressió de radiació

a) absorció, amb incidència normal



b) reflexió



Si:

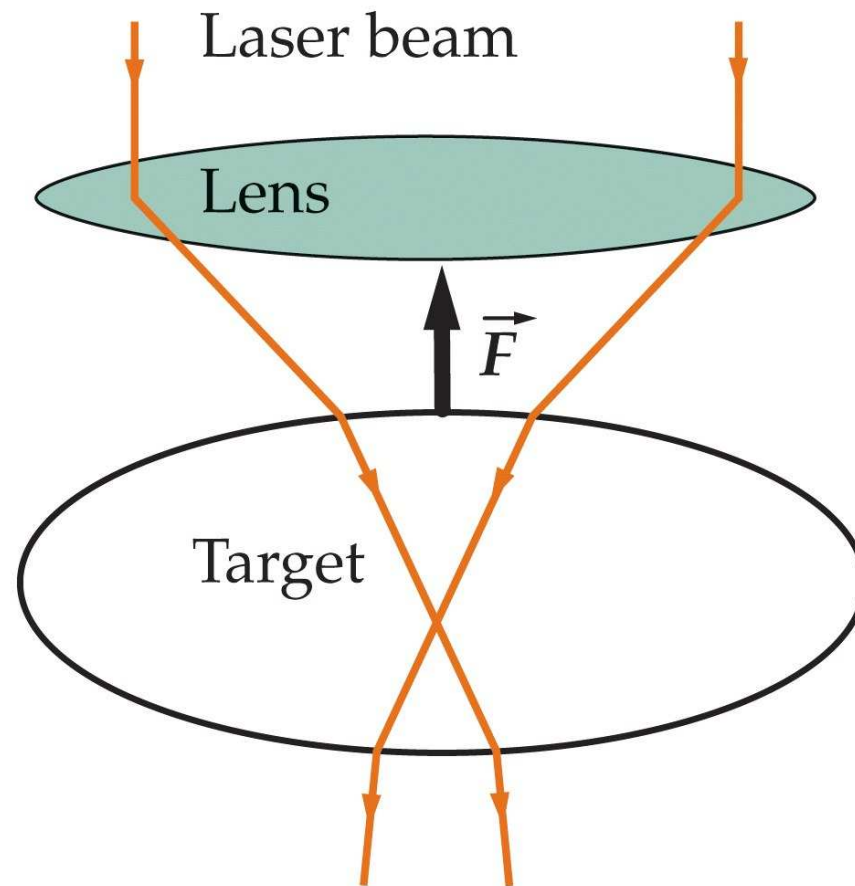
$$\mathcal{I} = 1.4 \times 10^3 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

$$u = \frac{\mathcal{I}}{c} = 4.7 \times 10^{-6} \frac{\text{J}}{\text{m}^3}$$

$$P_{\text{rad}} = u = 4.7 \times 10^{-6} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

$$(P_{\text{atm}} \approx 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2})$$

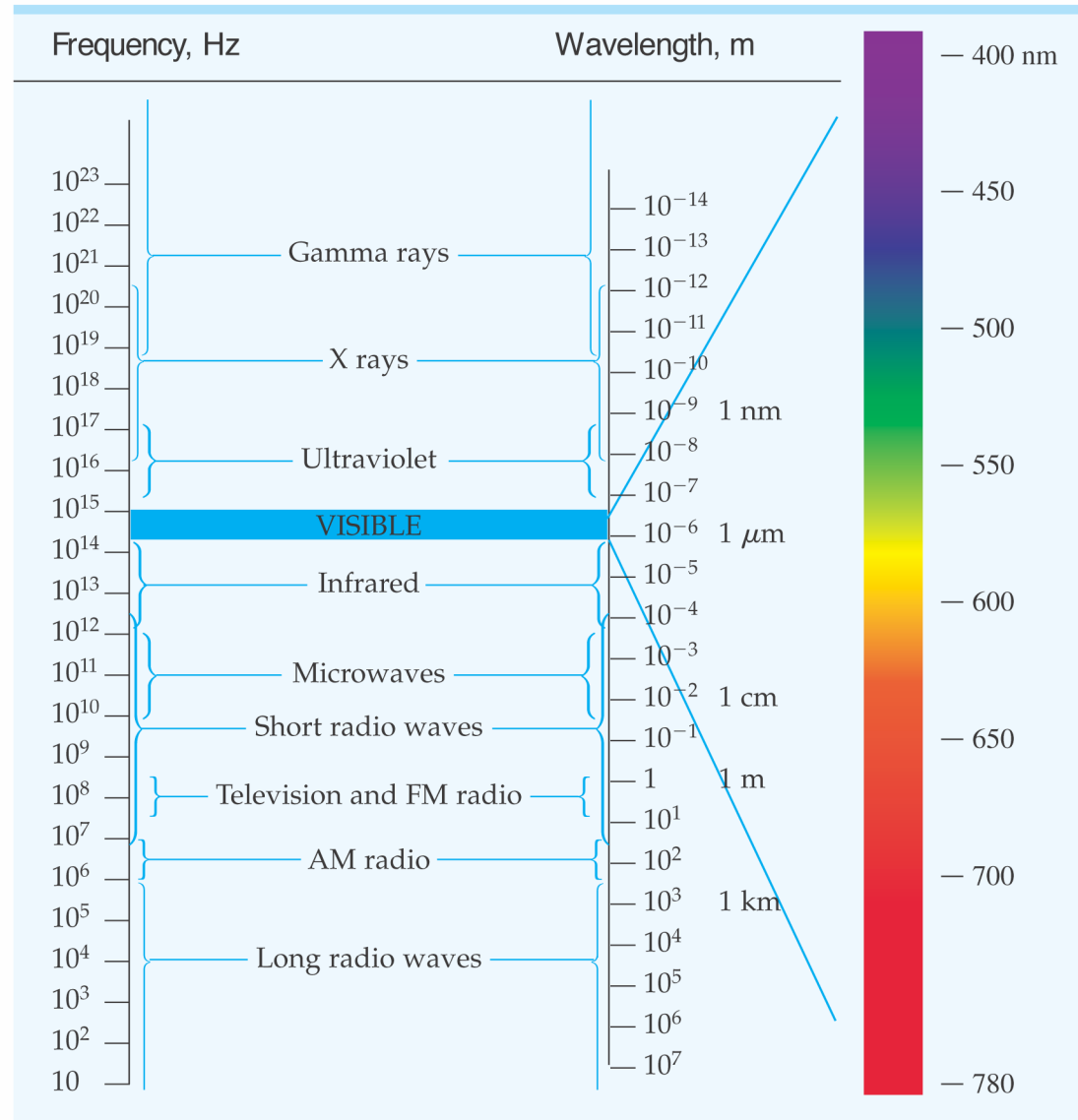
Unes pinces optiques



L'espectre de radiació EM

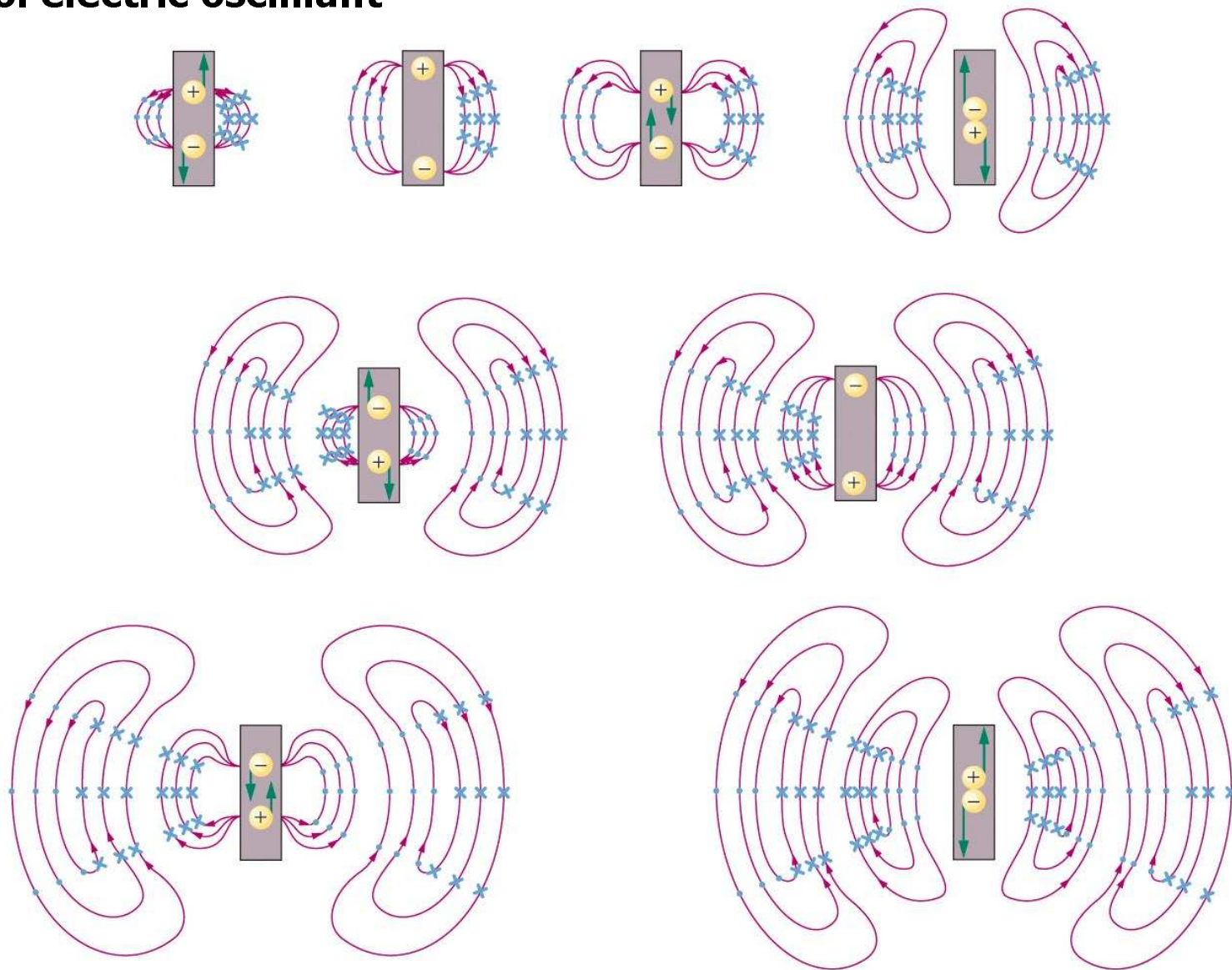
TABLE 30-1

The Electromagnetic Spectrum

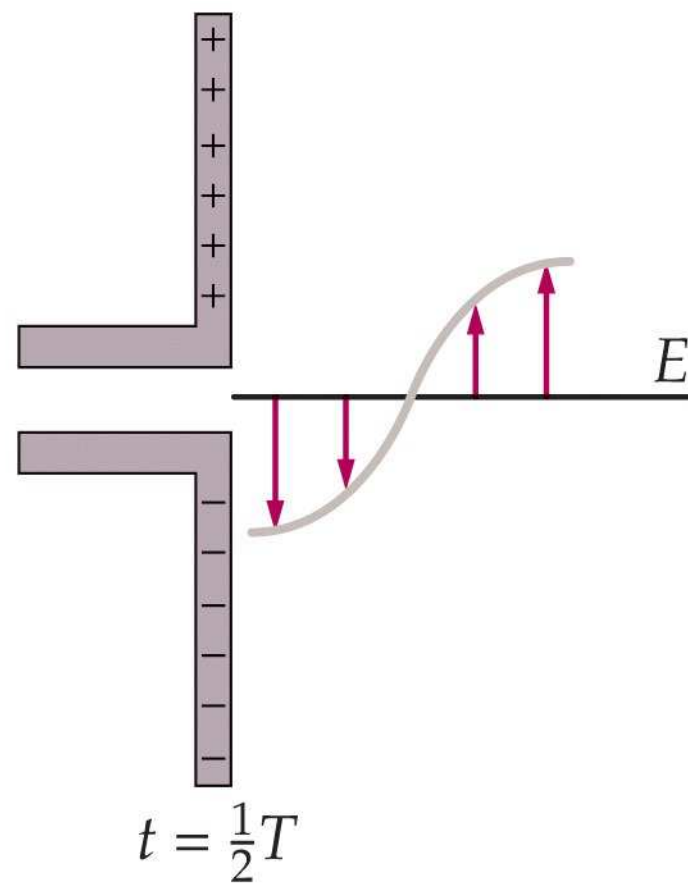
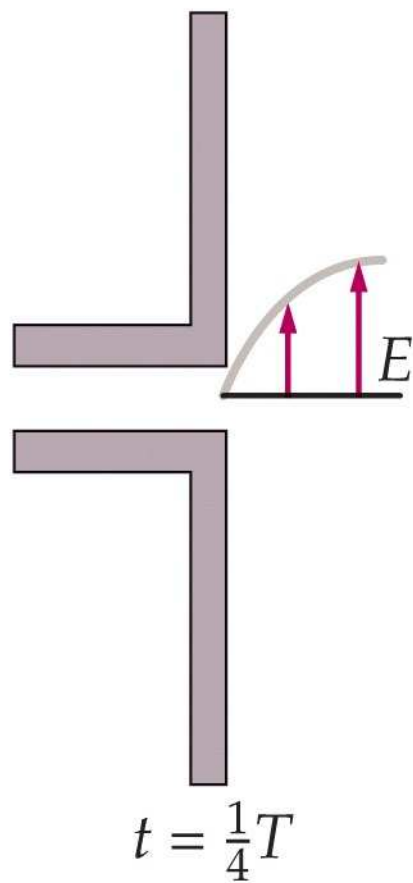
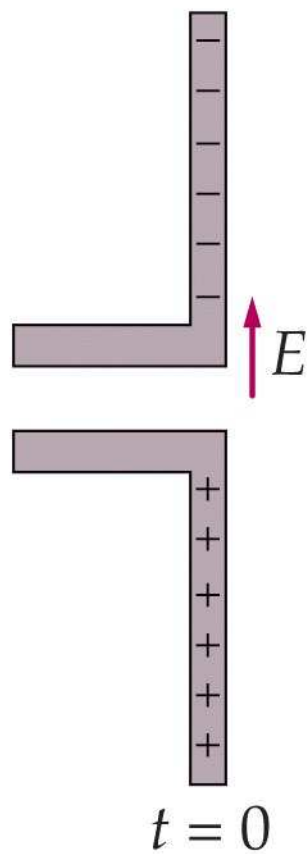


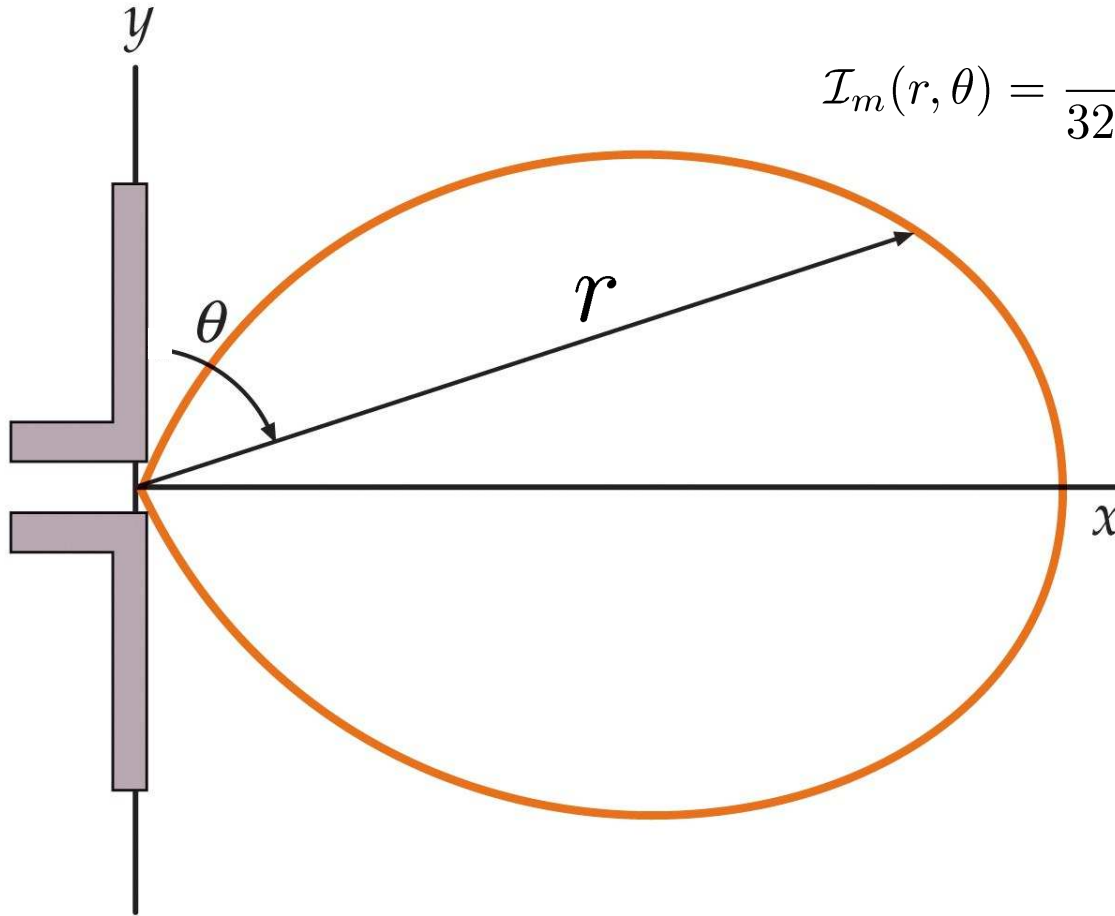
Generació d'ones EM

Dipol elèctric oscil.lant

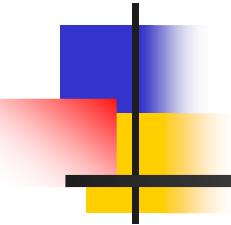


Antena dipolar elèctrica





$$\mathcal{I}_m(r, \theta) = \frac{p_0 \omega^4}{32 \pi^2 c^3 \epsilon_0 r^2} \sin^2 \theta$$



Problems



30.1

30.23

30.25

30.3

30.45

30.9

30.47

30.10

30.56

30.12

30.15

30.20

