

# Camp elèctric (II)

---

## Distribucions contínues de càrrega

Idea: cada *element diferencial* de la distribució contínua es comporta com a una càrrega puntual

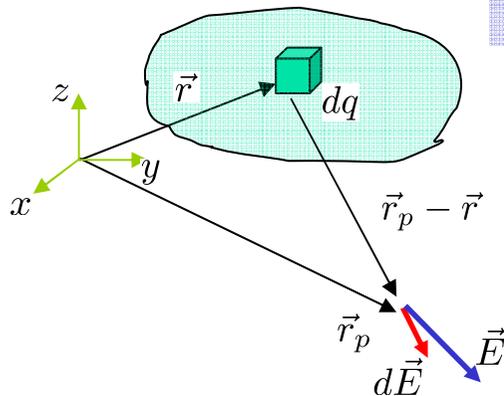
El camp total és la suma (integral) de totes les contribucions diferencials

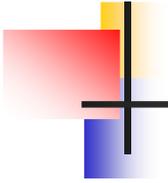
$$d\vec{E}(\vec{r}_p) = k \frac{dq}{|\vec{r}_p - \vec{r}|^3} (\vec{r}_p - \vec{r})$$

$$\vec{E}(\vec{r}_p) = k \int \frac{\vec{r}_p - \vec{r}}{|\vec{r}_p - \vec{r}|^3} dq$$

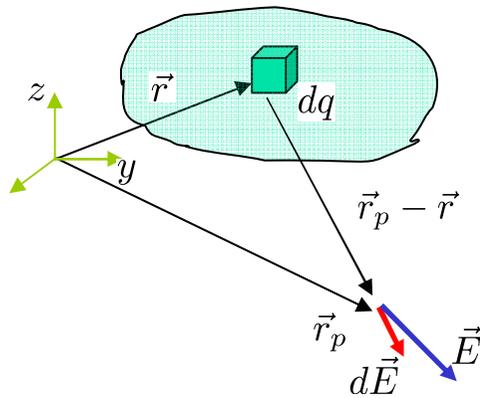
Vector que uneix  $dq$  i el punt de prova

Distància entre  $dq$  i el punt de prova al cub





Amb densitats volúmiques de càrrega



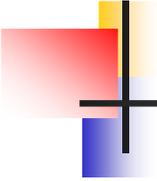
$$dq = \rho(\vec{r}) dv$$

$$\vec{E}(\vec{r}_p) = k \int \frac{\vec{r}_p - \vec{r}}{|\vec{r}_p - \vec{r}|^3} \rho(\vec{r}) dv$$

$$E_x(\vec{r}_p) = k \int \int \int \frac{x_p - x}{[(x_p - x)^2 + (y_p - y)^2 + (z_p - z)^2]^{3/2}} \rho(\vec{r}) dx dy dz$$

$$E_y(\vec{r}_p) = k \int \int \int \frac{y_p - y}{[(x_p - x)^2 + (y_p - y)^2 + (z_p - z)^2]^{3/2}} \rho(\vec{r}) dx dy dz$$

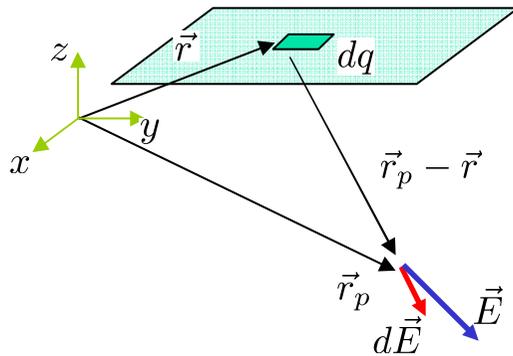
$$E_z(\vec{r}_p) = k \int \int \int \frac{z_p - z}{[(x_p - x)^2 + (y_p - y)^2 + (z_p - z)^2]^{3/2}} \rho(\vec{r}) dx dy dz$$



## L'alfabet grec

A α	alpha	N ν	nu
B β	beta	Ξ ξ	ksi
Γ γ	gamma	Ο ο	omicron
Δ δ	delta	Π π	pi
E ε	epsilon	Ρ ρ	rho
Z ζ	zeta	Σ σς	sigma
H η	eta	Τ τ	tau
Θ θ	theta	Υ υ	upsilon
I ι	iota	Φ φ	phi
K κ	kappa	X χ	chi
Λ λ	lambda	Ψ ψ	psi
M μ	mu	Ω ω	omega

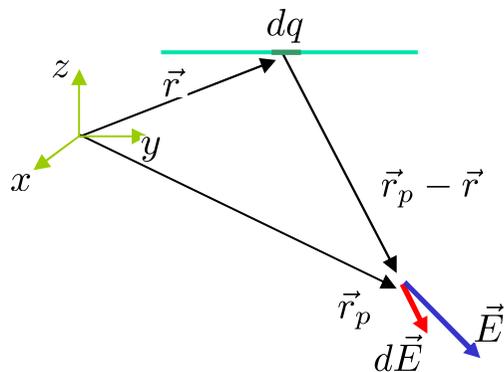
Amb densitats superficials de càrrega



$$dq = \sigma(\vec{r}) ds$$

$$\vec{E}(\vec{r}_p) = k \int \frac{\vec{r}_p - \vec{r}}{|\vec{r}_p - \vec{r}|^3} \sigma ds$$

Amb densitats lineals de càrrega

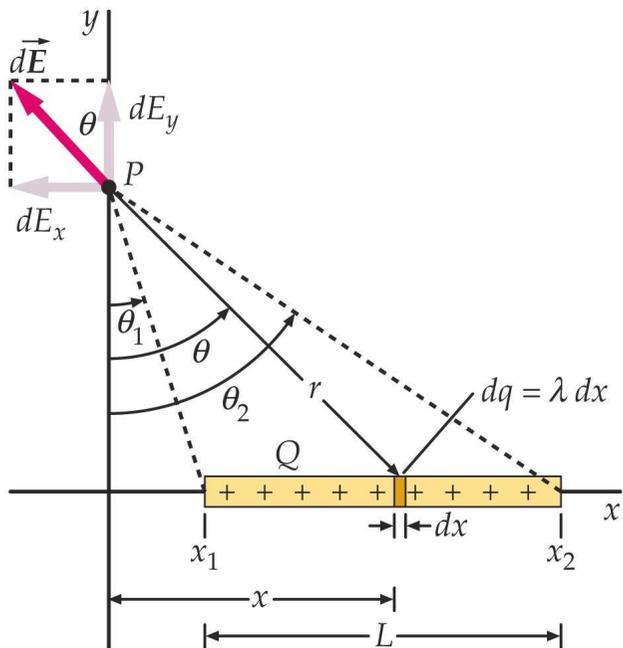


$$dq = \lambda(\vec{r}) dl$$

$$\vec{E}(\vec{r}_p) = k \int \frac{\vec{r}_p - \vec{r}}{|\vec{r}_p - \vec{r}|^3} \lambda dl$$

## Exemples:

### Fils carregats



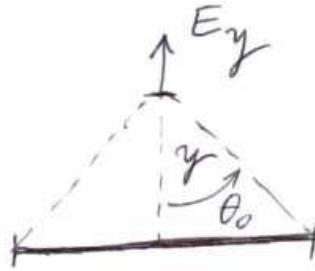
$$|d\vec{E}| = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + y^2)}$$

$$\tan\theta = \frac{x}{y} \rightarrow x = y \tan\theta$$

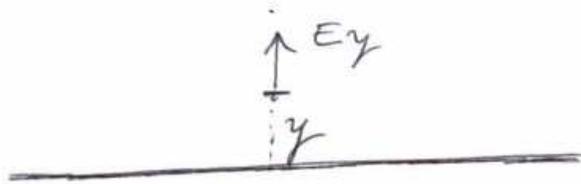
$$dx = \frac{y}{\cos^2\theta} d\theta$$

$$|d\vec{E}| = \frac{\lambda \frac{y}{\cos^2\theta} d\theta}{4\pi\epsilon_0 y^2 (\tan^2\theta + 1)} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 y} d\theta$$

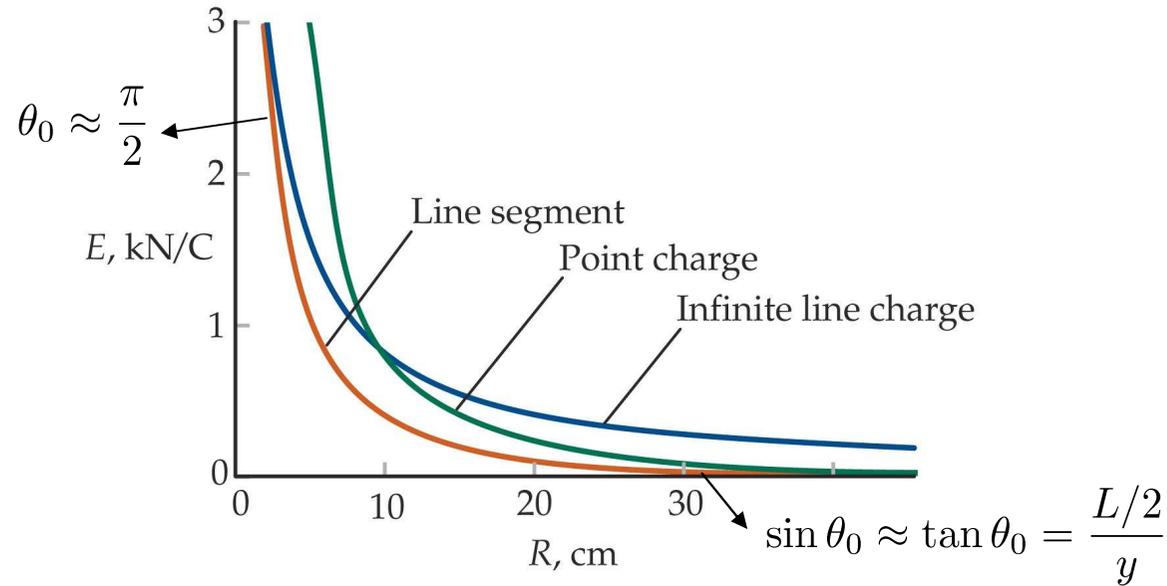
$$\begin{cases} E_y = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 y} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos\theta d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 y} (\sin\theta_2 - \sin\theta_1) \\ E_x = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 y} \int_{\theta_1}^{\theta_2} (-\sin\theta) d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 y} (\cos\theta_2 - \cos\theta_1) \end{cases}$$



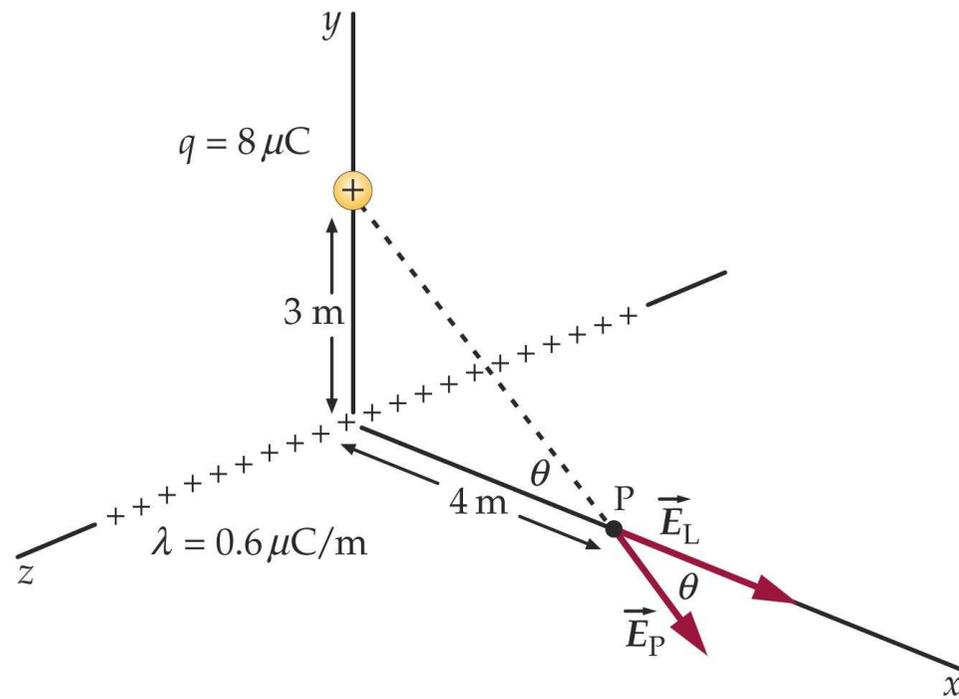
$$\begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = \frac{2\lambda}{4\pi\epsilon_0 y} \sin\theta_0 \end{cases}$$



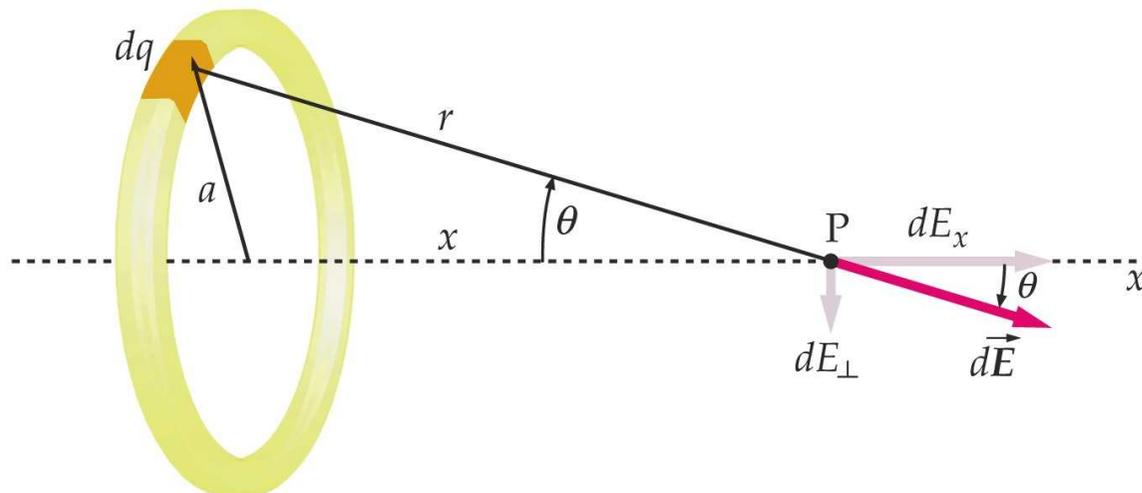
$$\begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = \frac{2\lambda}{4\pi\epsilon_0 y} \end{cases}$$



superposició



# Anell uniformement carregat

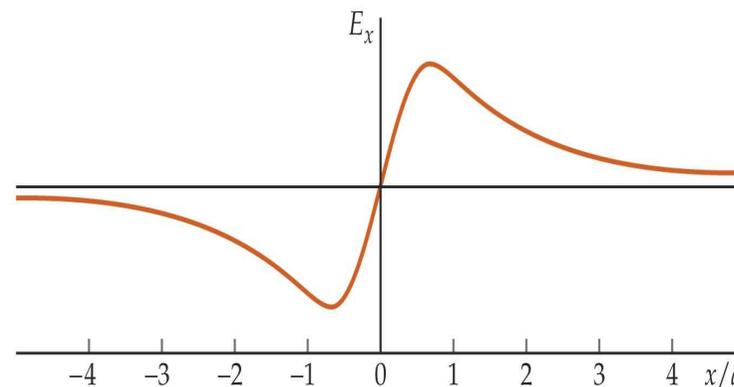
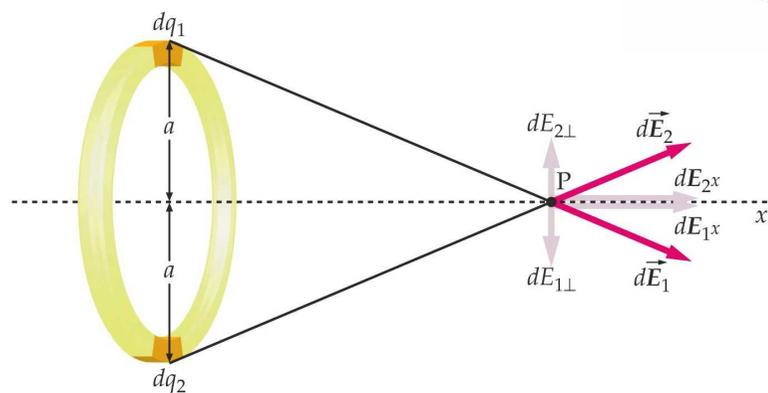


$$E_x = \int |d\vec{E}| \cos \theta = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \theta = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \theta$$

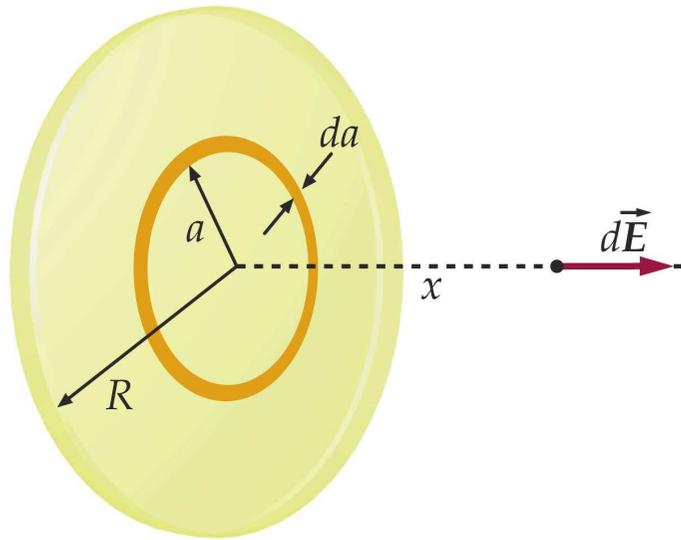
$$r = \sqrt{x^2 + a^2}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r}$$

$$E_x = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$$



# Disc uniformement chargé



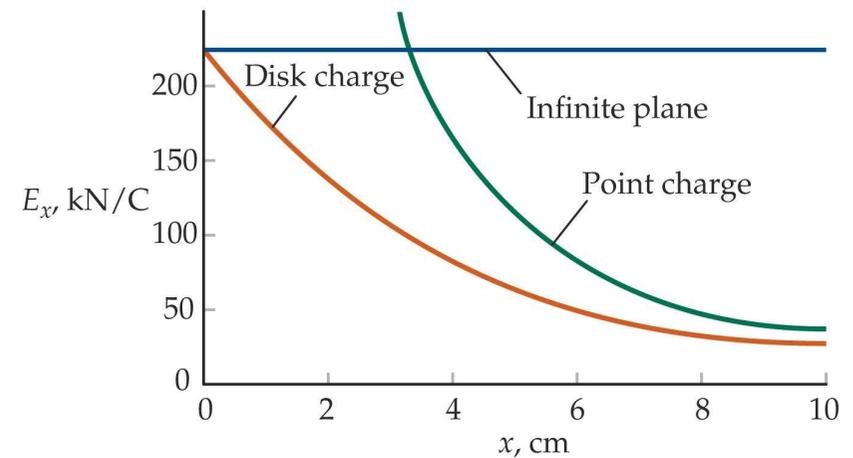
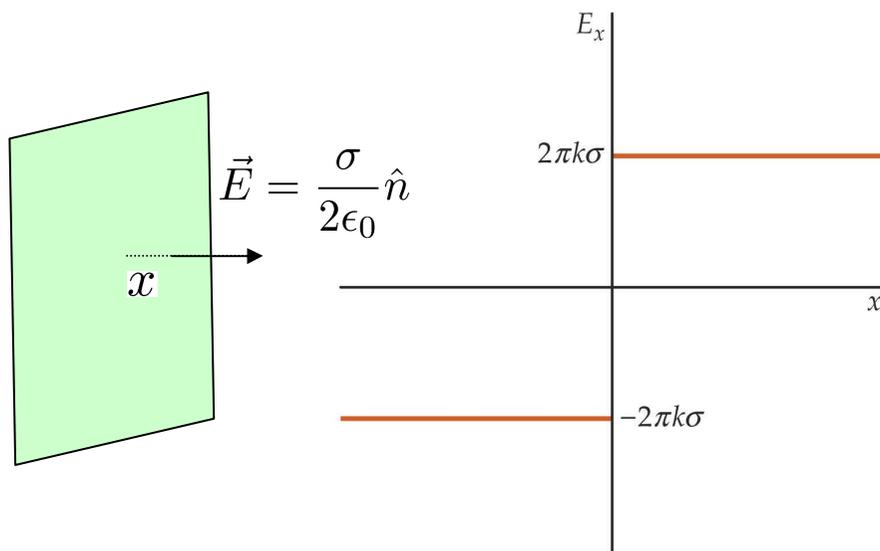
$$dq = \sigma 2\pi a da$$

$$|d\vec{E}| = \frac{\sigma 2\pi a da}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(x^2+a^2)^{3/2}}$$

$$E_x = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \times \int_{a=0}^{a=R} \frac{a}{(x^2+a^2)^{3/2}} da = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \times \left[ \frac{-1}{(x^2+a^2)^{1/2}} \right]_{a=0}^{a=R}$$

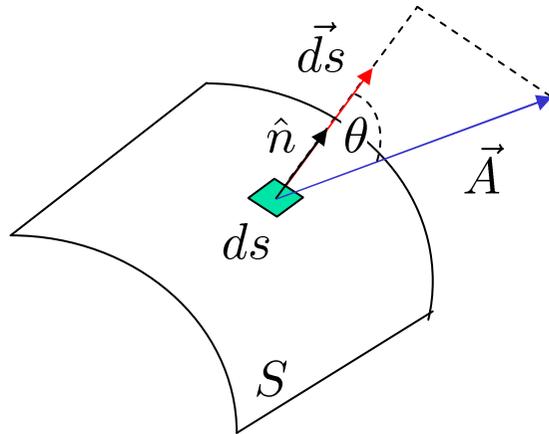
$$= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \times \left[ \frac{1}{x} - \frac{1}{(x^2+R^2)^{1/2}} \right] = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ 1 - \frac{x}{(x^2+R^2)^{1/2}} \right]$$

Si  $R \rightarrow \infty \Rightarrow E_x = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$



# El flux elèctric. La llei de Gauss

El flux d'un camp vectorial  $\vec{A}(\vec{r})$  per una superfície  $S$



$$\vec{A} \cdot d\vec{s} = A \cos \theta ds$$

$$\left( \text{Flux de } \vec{A} \text{ per } S \right) \equiv \int_S \vec{A} \cdot d\vec{s}$$

Casos senzills:

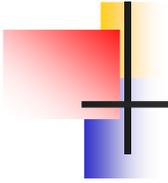
superfície plana  
 $\vec{A}$  constant

$$\int_S \vec{A} \cdot d\vec{s} = A S$$

$$\int_S \vec{A} \cdot d\vec{s} = A \cos \theta S$$

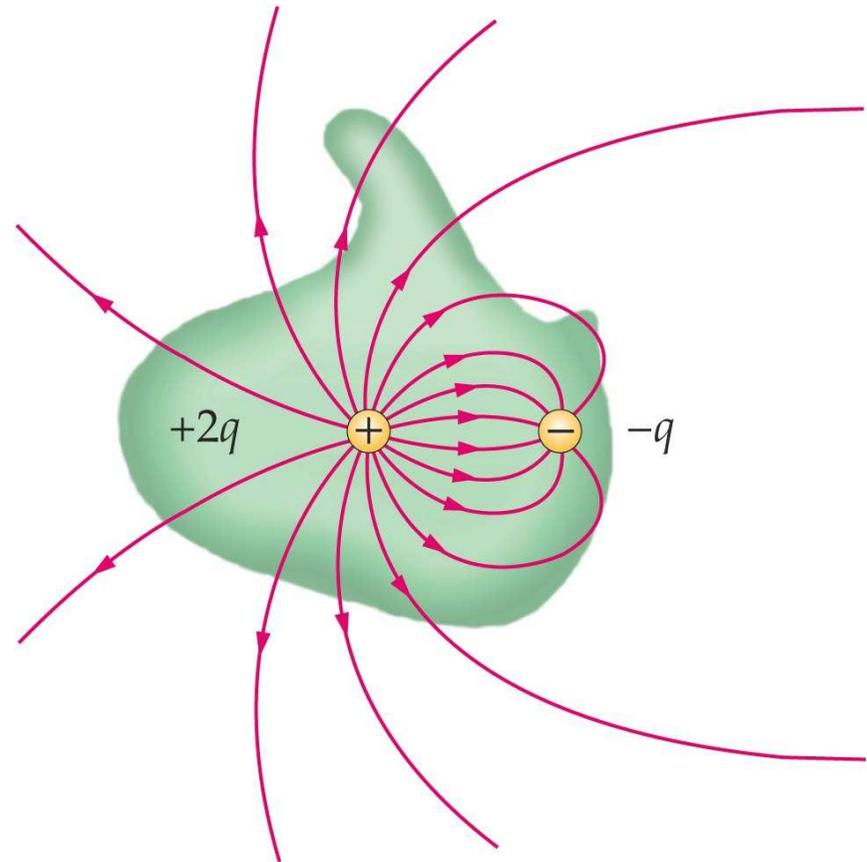
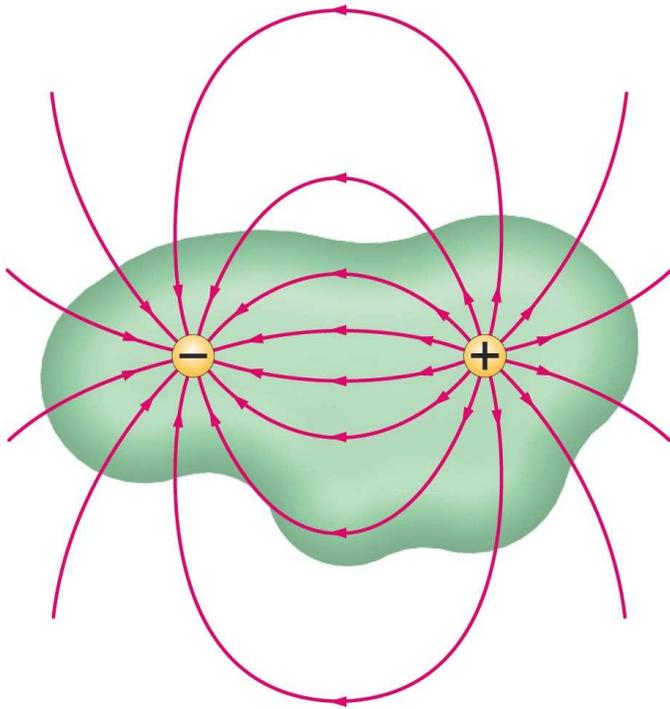
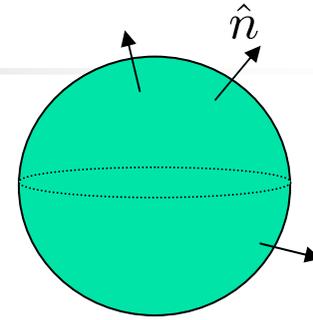
component perpendicular  
constant

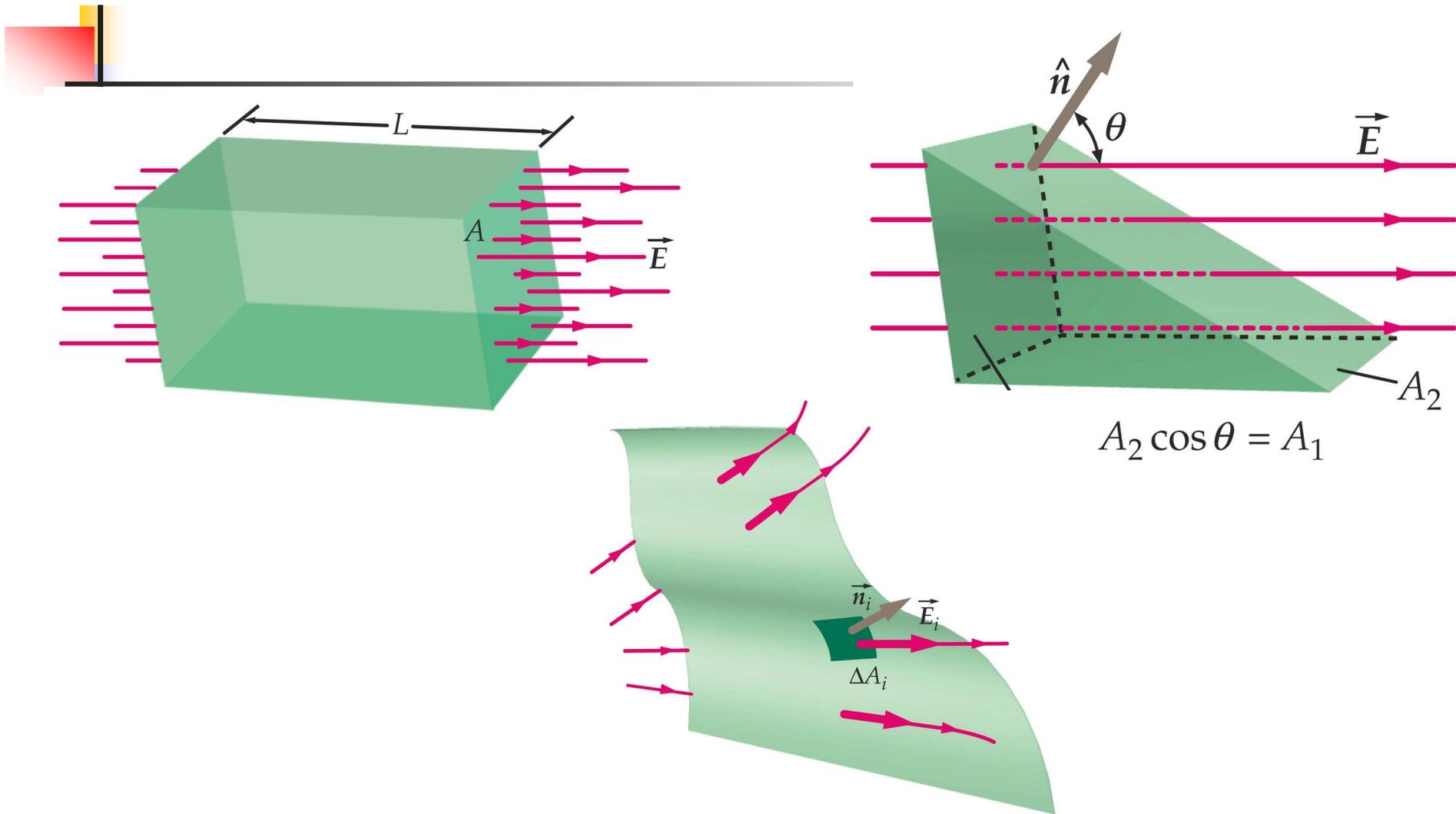
$$\int_S \vec{A} \cdot d\vec{s} = A 2\pi R H$$



Si la superfície és tancada: normal cap a fora

notació  $\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{s}$

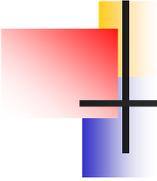




$$\phi = \lim_{\Delta A_i \rightarrow 0} \sum_i \vec{E}_i \cdot \hat{n}_i \Delta A_i = \int_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA$$

22-16

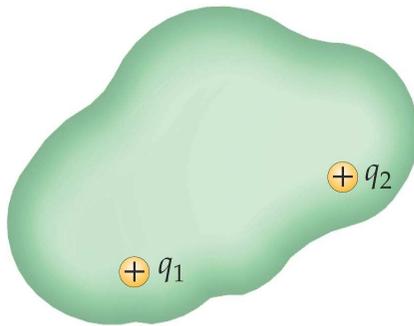
DEFINITION—ELECTRIC FLUX



El flux per una superfície tancada és igual a la càrrega neta al seu interior dividida per  $\epsilon_0$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

LLEI DE GAUSS

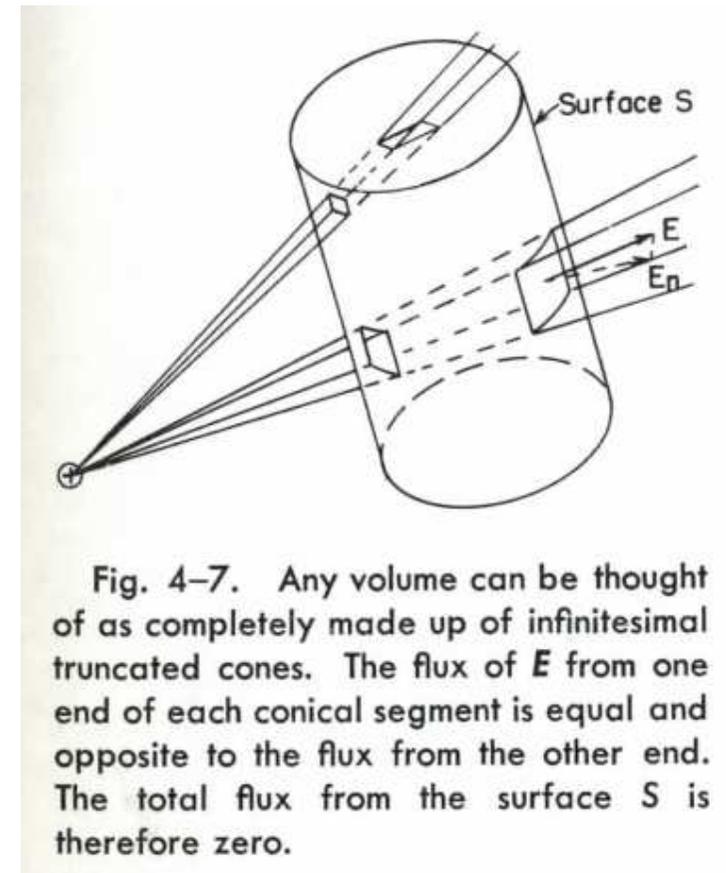
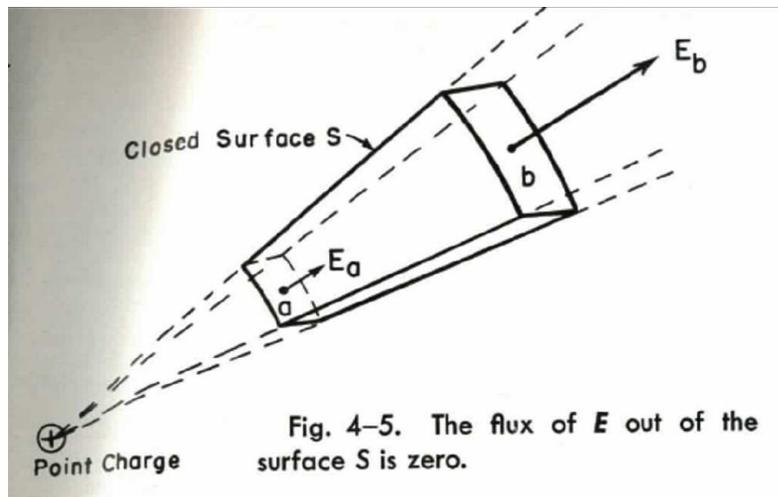


$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q_1 + q_2}{\epsilon_0}$$

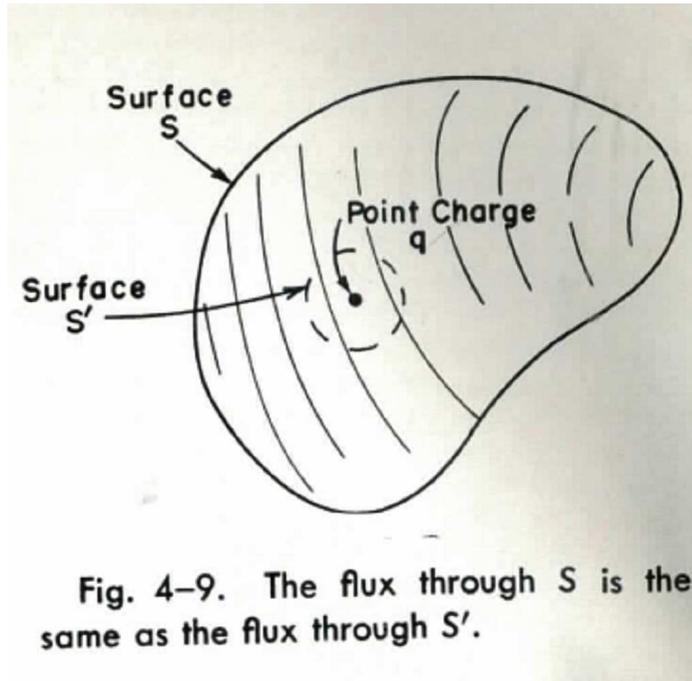
$+$   $q_3$

## Verifiquem la llei de Gauss per a una càrrega puntual

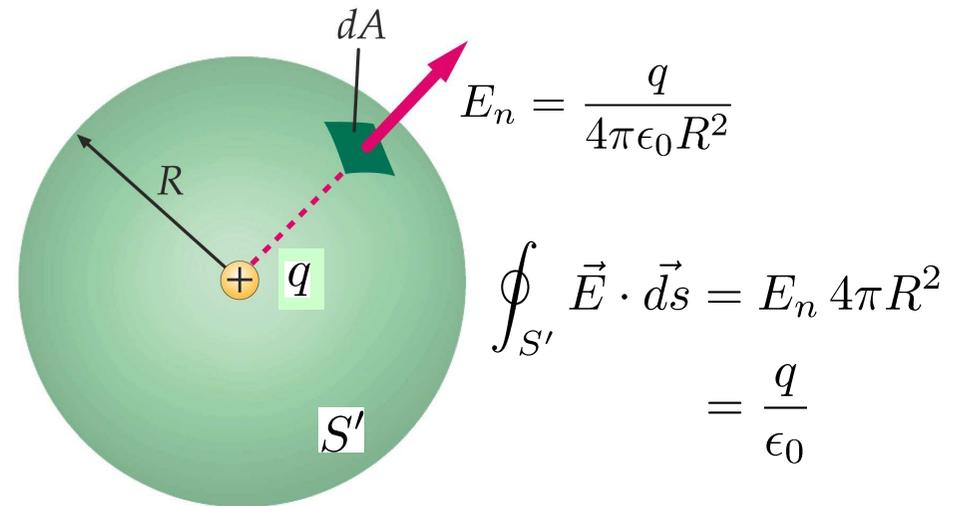
Si la càrrega és a fora el flux sempre és zero

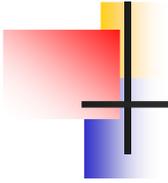


Si la càrrega és a dins el flux és  $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q}{\epsilon_0}$



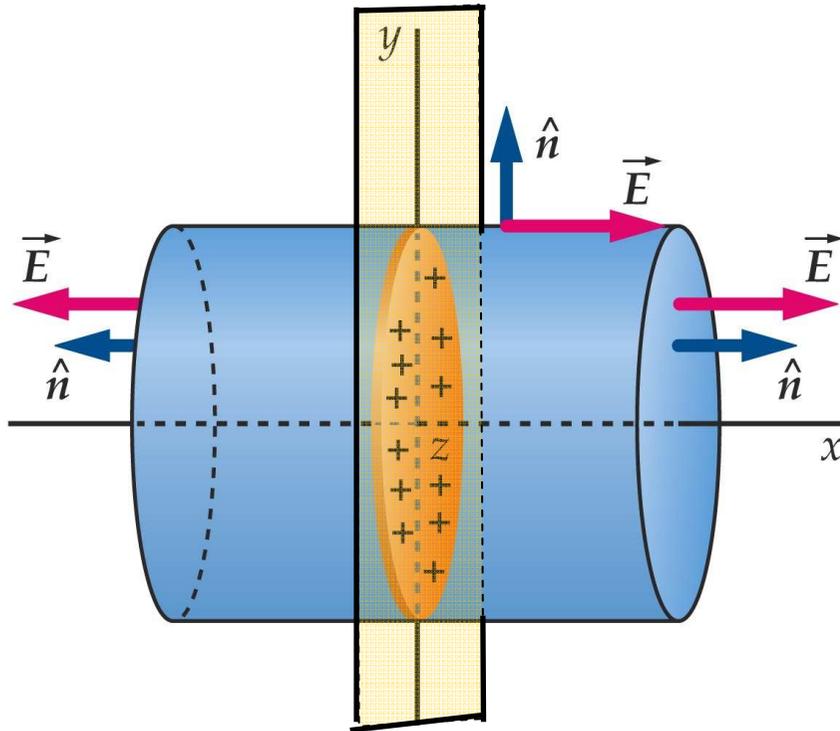
$$\oint_{S+S'} \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \quad \Rightarrow \quad \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \oint_{S'} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$





- Principi de superposició
- La llei de Gauss és vàlida amb tota generalitat
- Llei fonamental de l'electromagnetisme
- Calcul senzill si el camp elèctric té simetria

## Pla de càrrega infinit

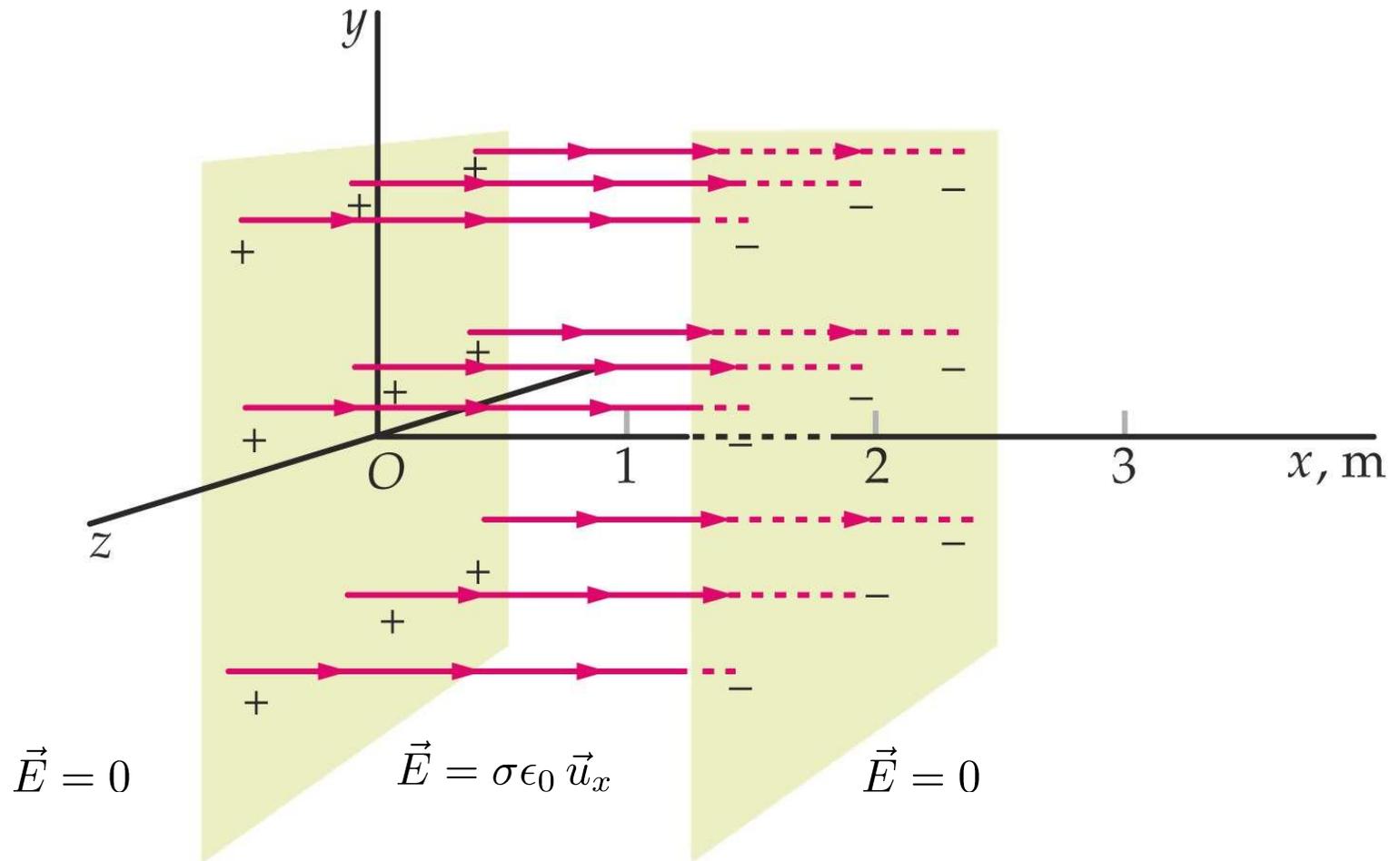


$$E_n = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = 2\pi k\sigma$$

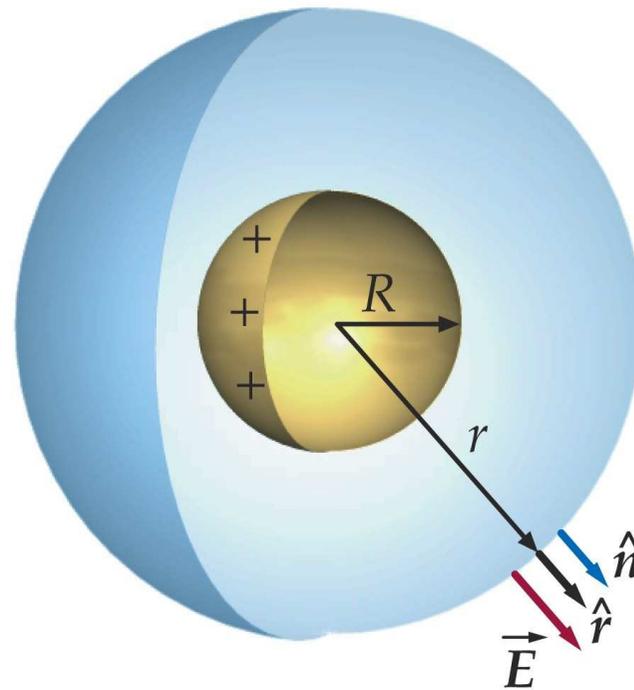
22-24

$\vec{E}$  FOR AN INFINITE PLANE OF CHARGE

# Dos plans



## Closca esfèrica



$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}, \quad r > R$$

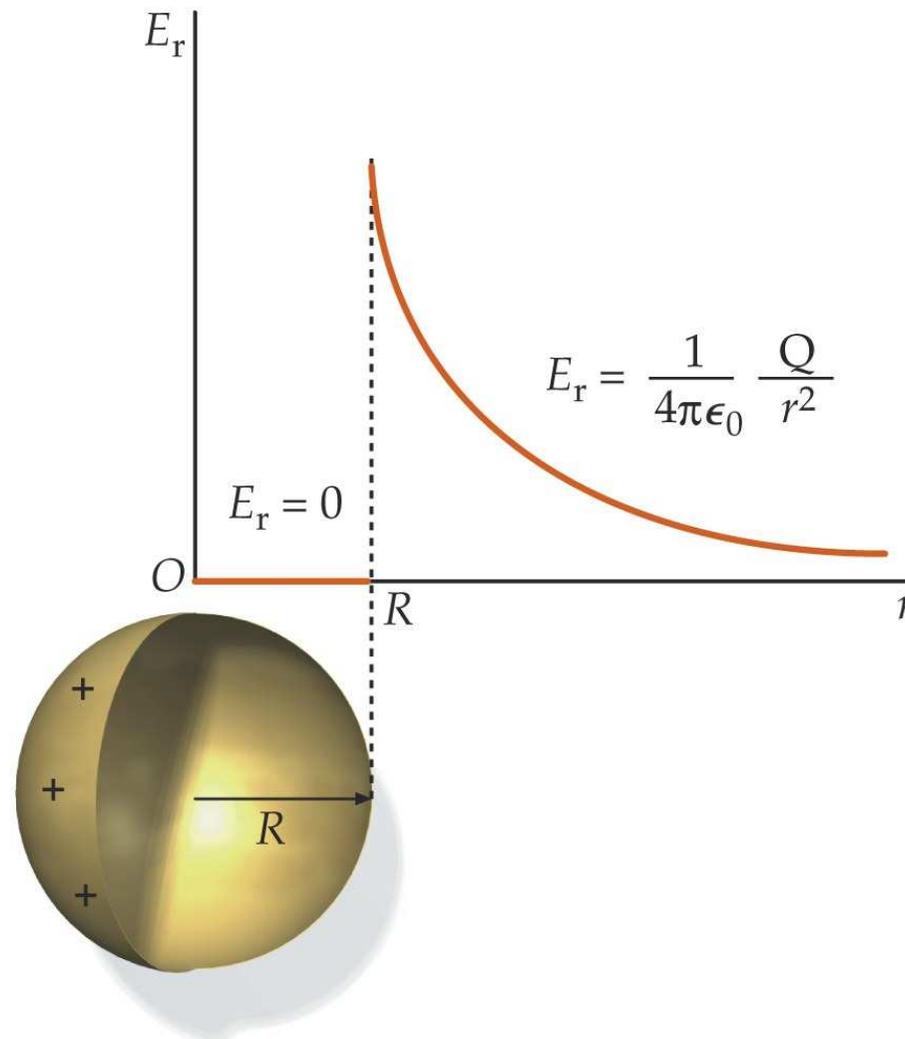
22-25a

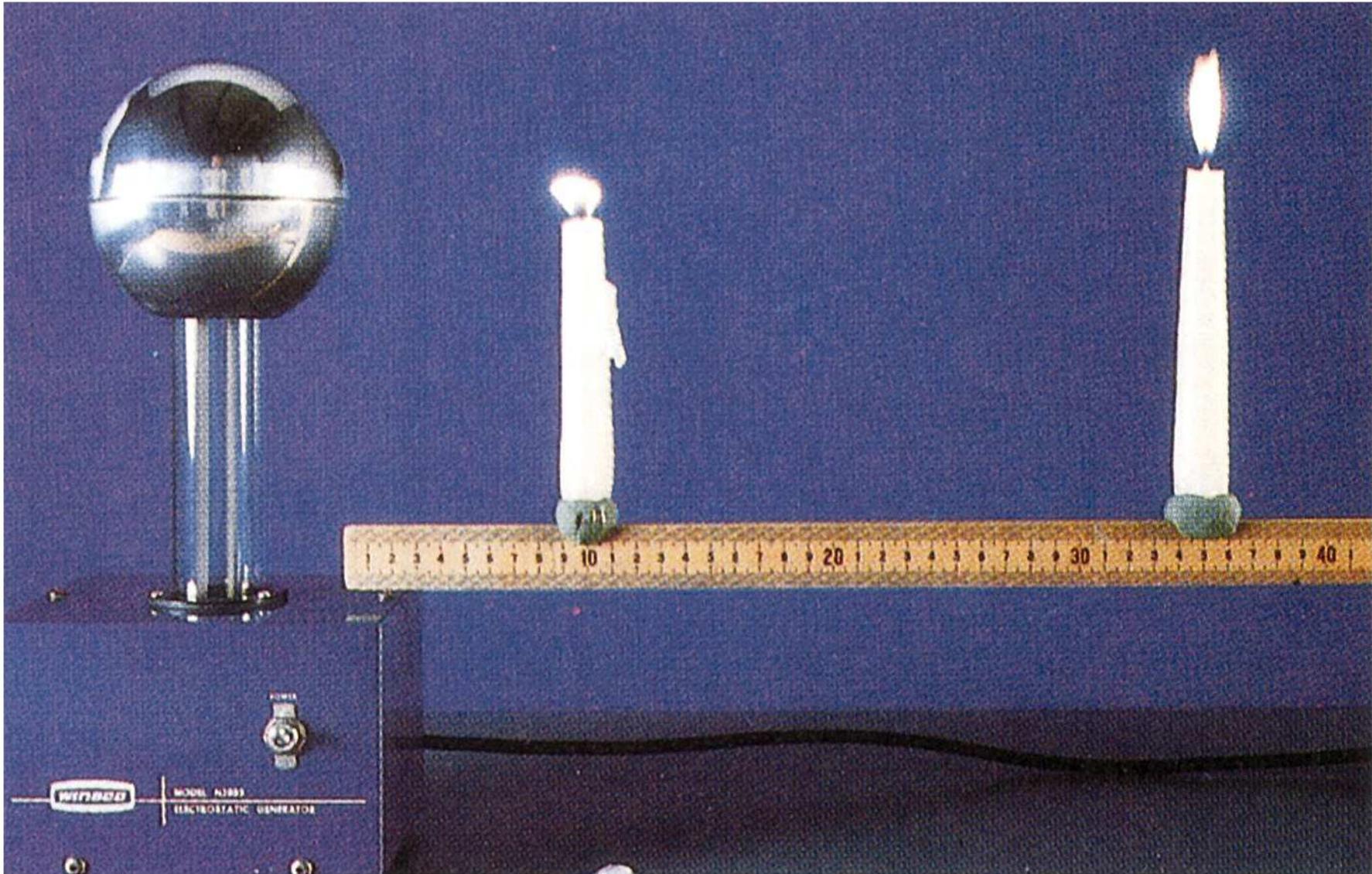
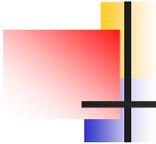
$\vec{E}$  OUTSIDE A SPHERICAL SHELL OF CHARGE

$$E_r = 0, \quad r < R$$

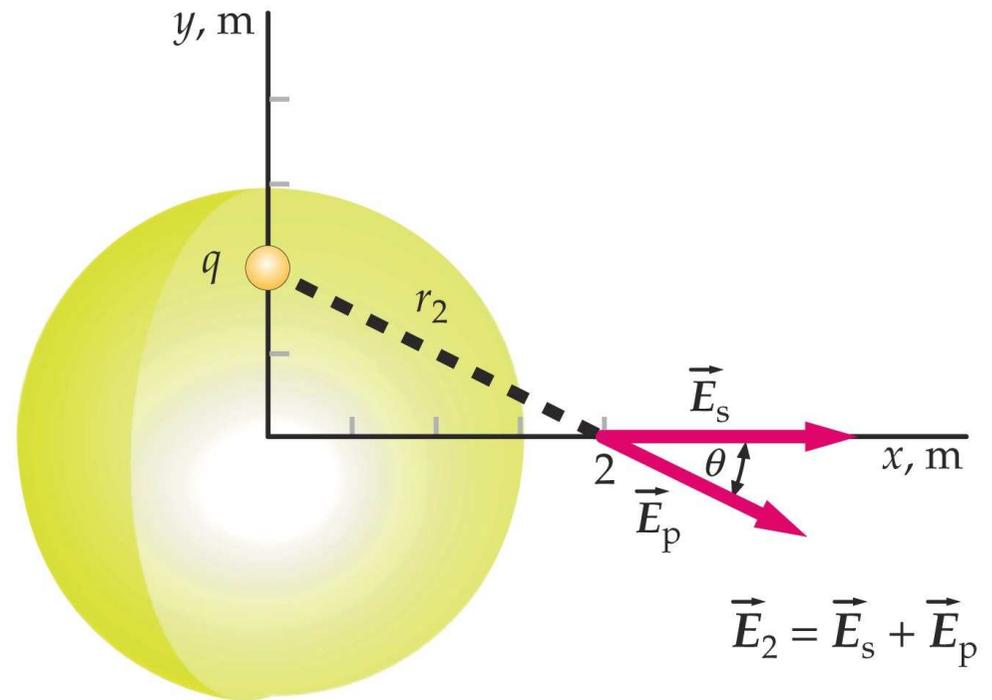
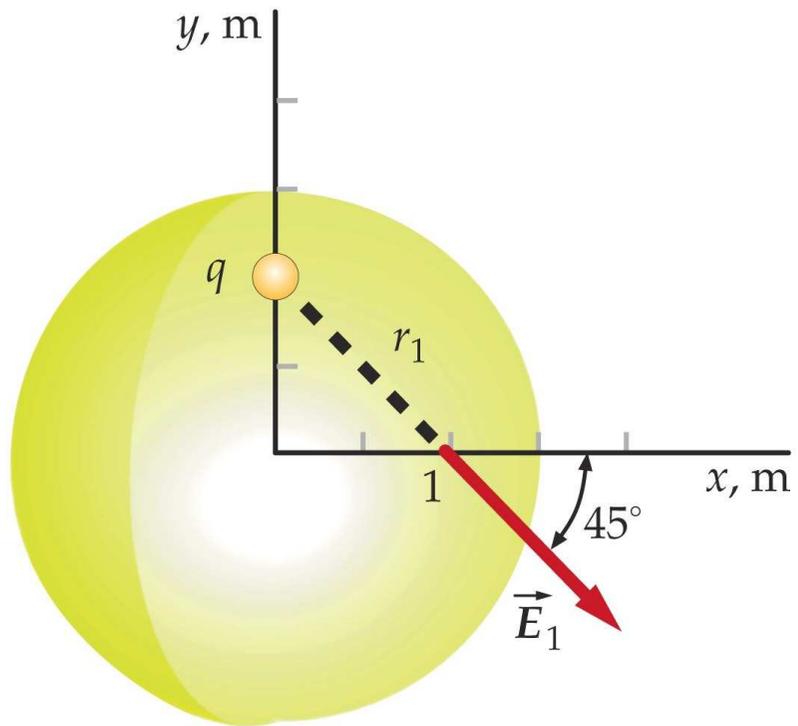
22-25b

$\vec{E}$  INSIDE A SPHERICAL SHELL OF CHARGE

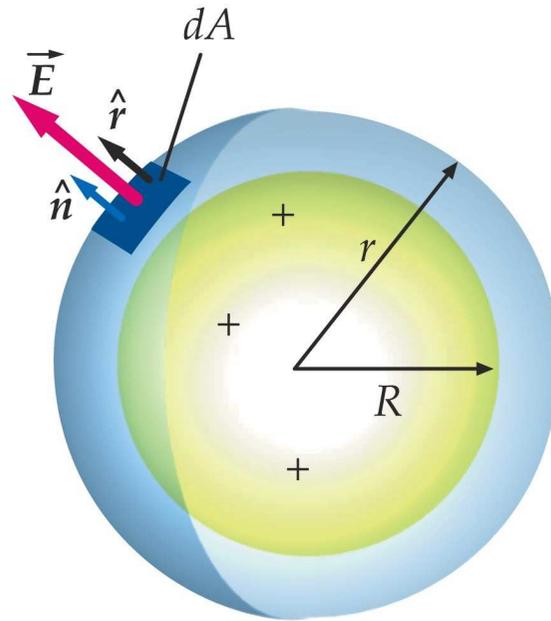




## Capa esfèrica i càrrega puntual (superposició)



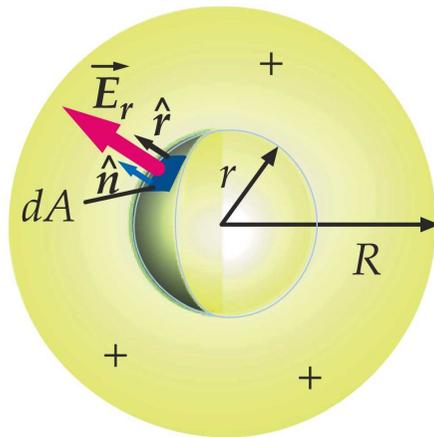
## Esfera uniformement carregada a tot el volum



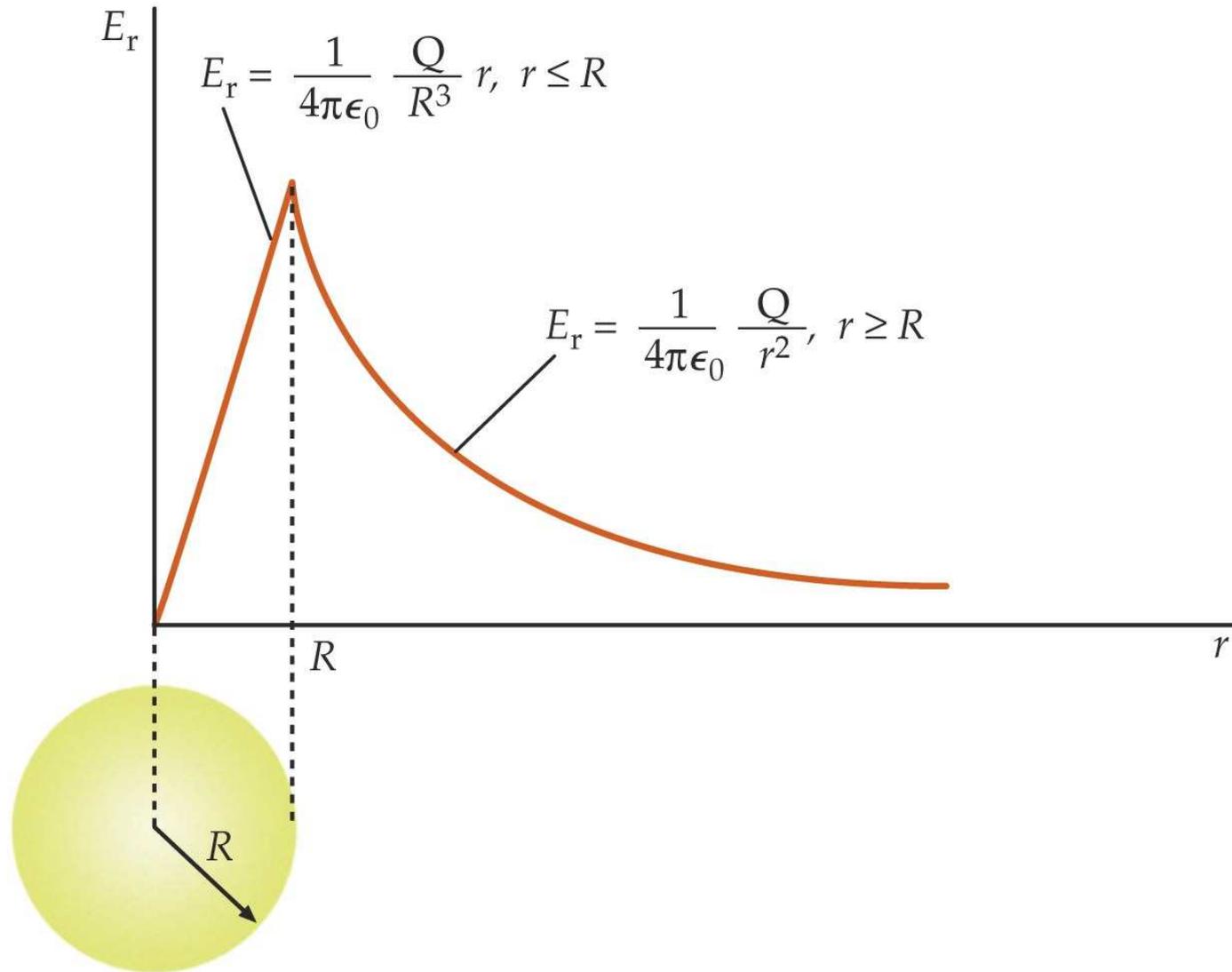
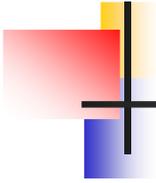
densitat  $\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$

simetria  $\vec{E} = E \vec{u}_r$

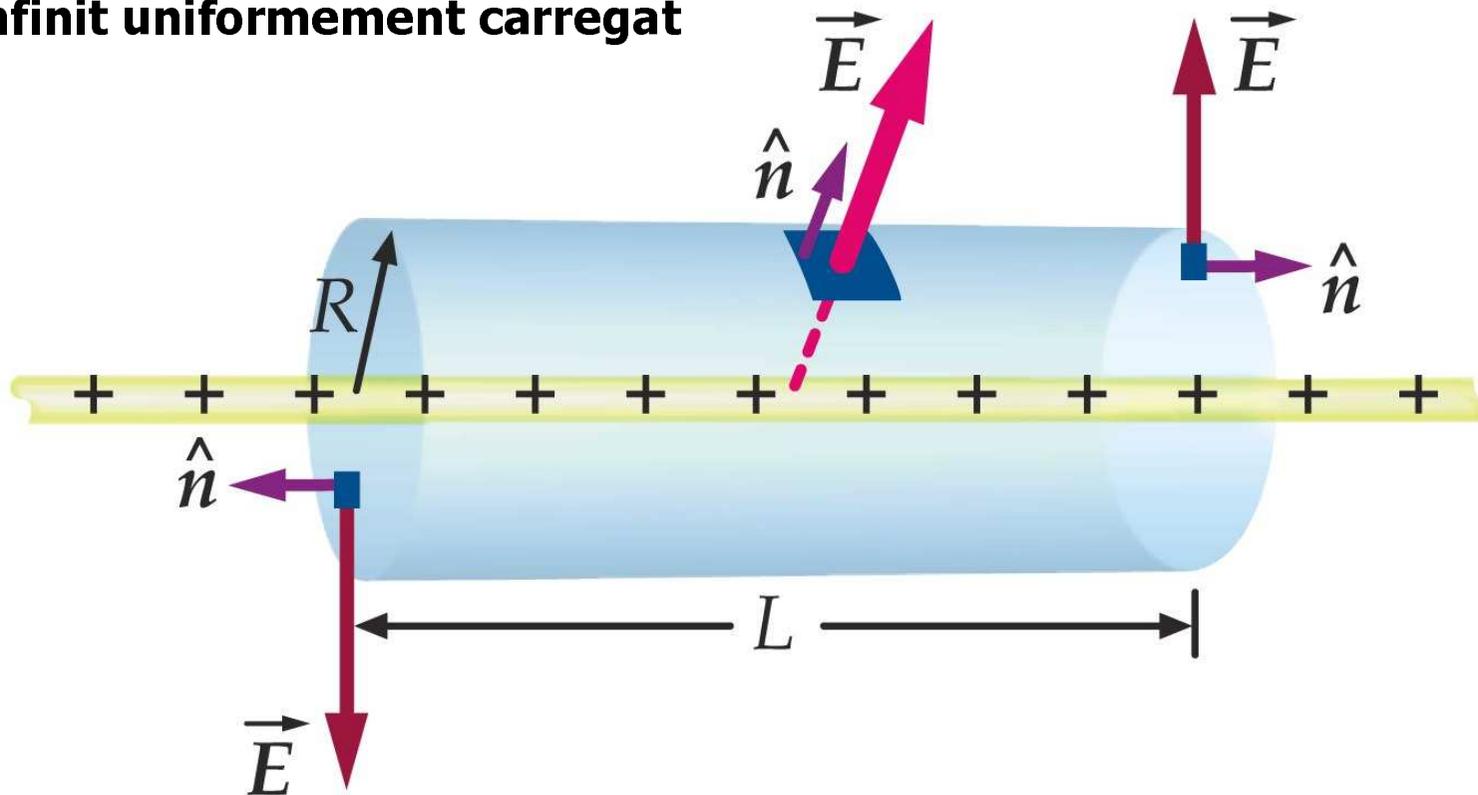
$$E 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$



$$E 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$$



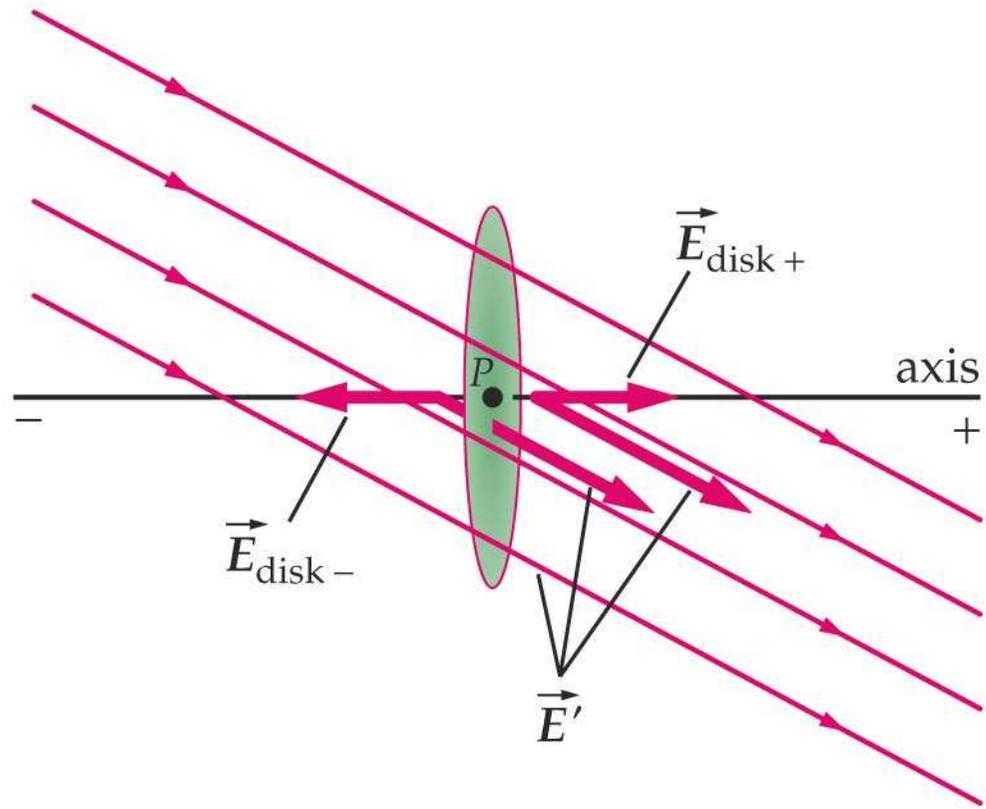
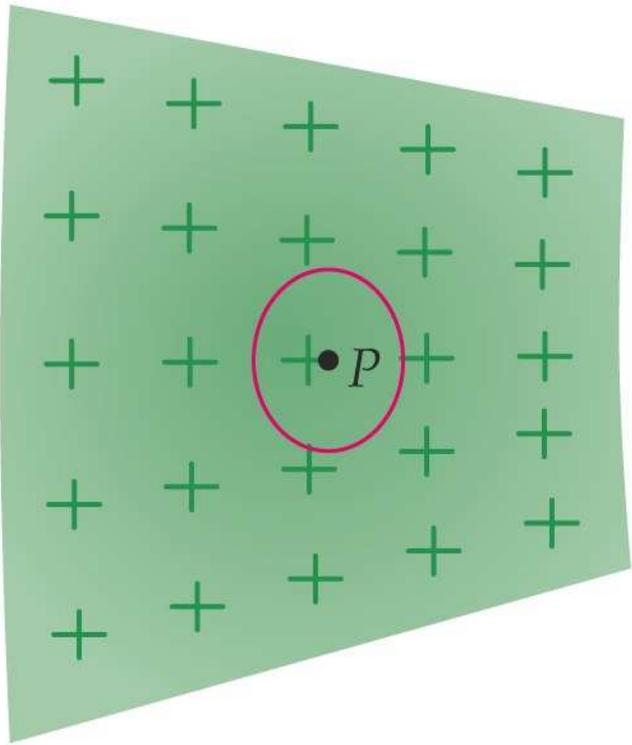
## Fil infinit uniformement carregat



Densitat lineal  $\lambda$

$$E 2\pi R L = \frac{\lambda L}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}$$

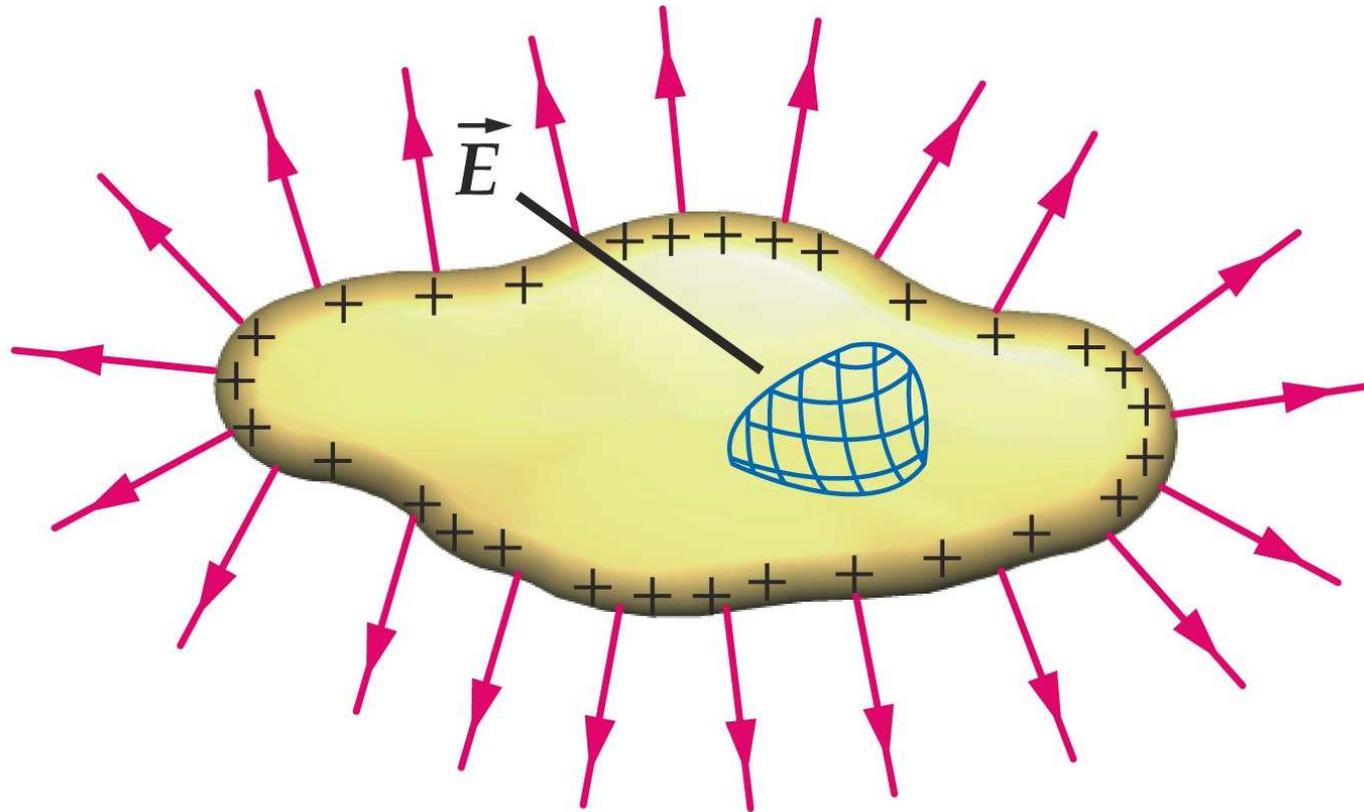
simetria  $\vec{E} = E \vec{u}_\rho$



$$\Delta E_n = E_{n+} - E_{n-} = \frac{\sigma}{2 \epsilon_0} - \left( -\frac{\sigma}{2 \epsilon_0} \right) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad 22-28$$

DISCONTINUITY OF  $E_n$  AT A SURFACE CHARGE

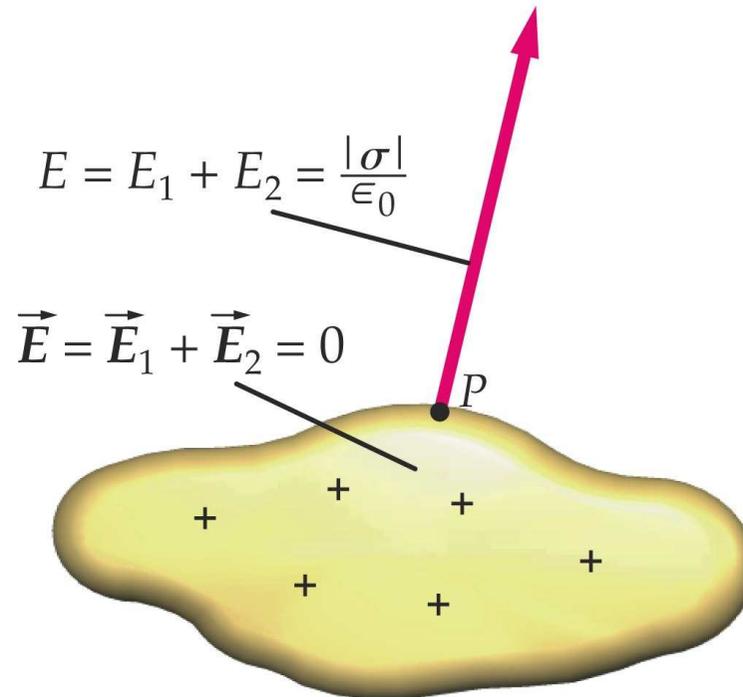
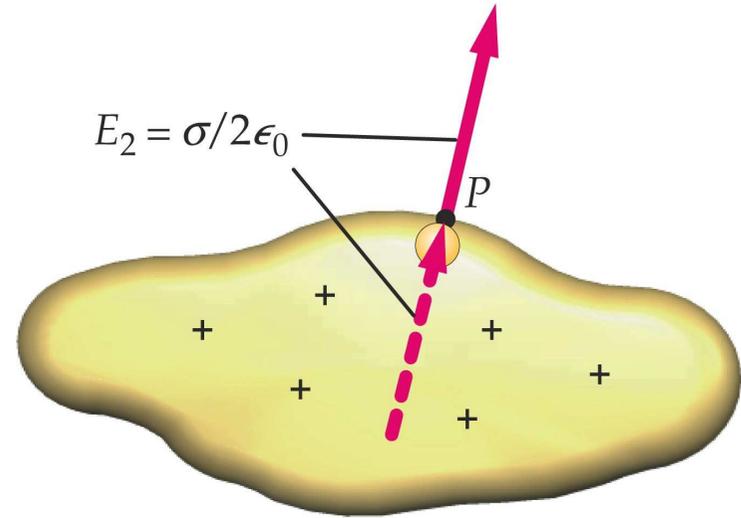
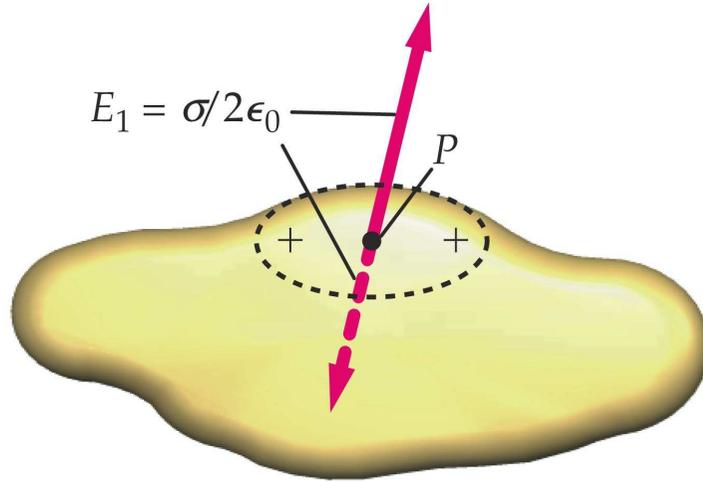
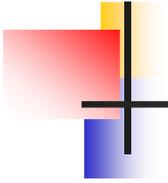
## Charge and Field at Conductor Surfaces

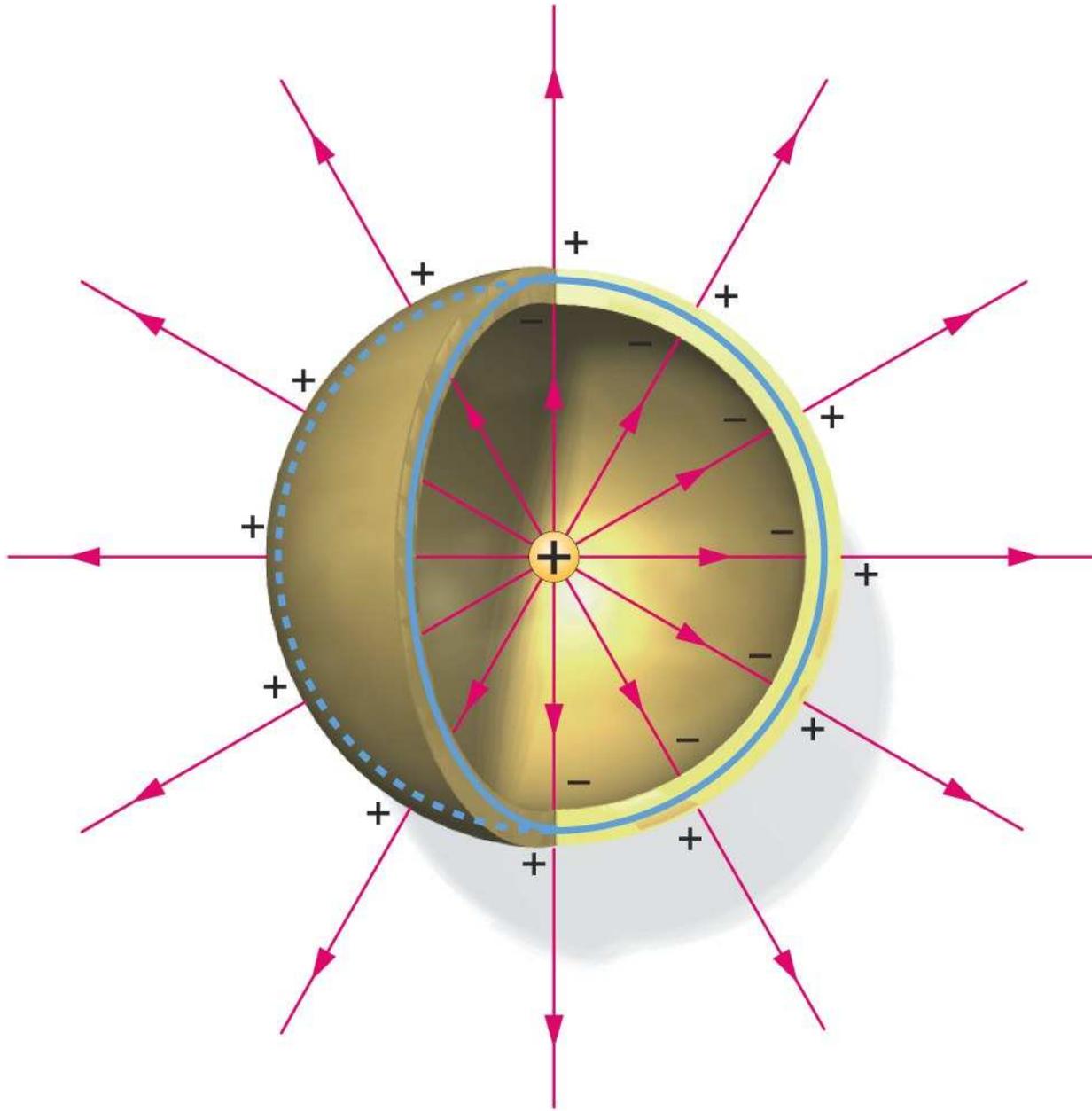
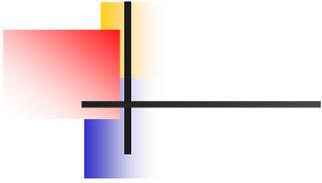


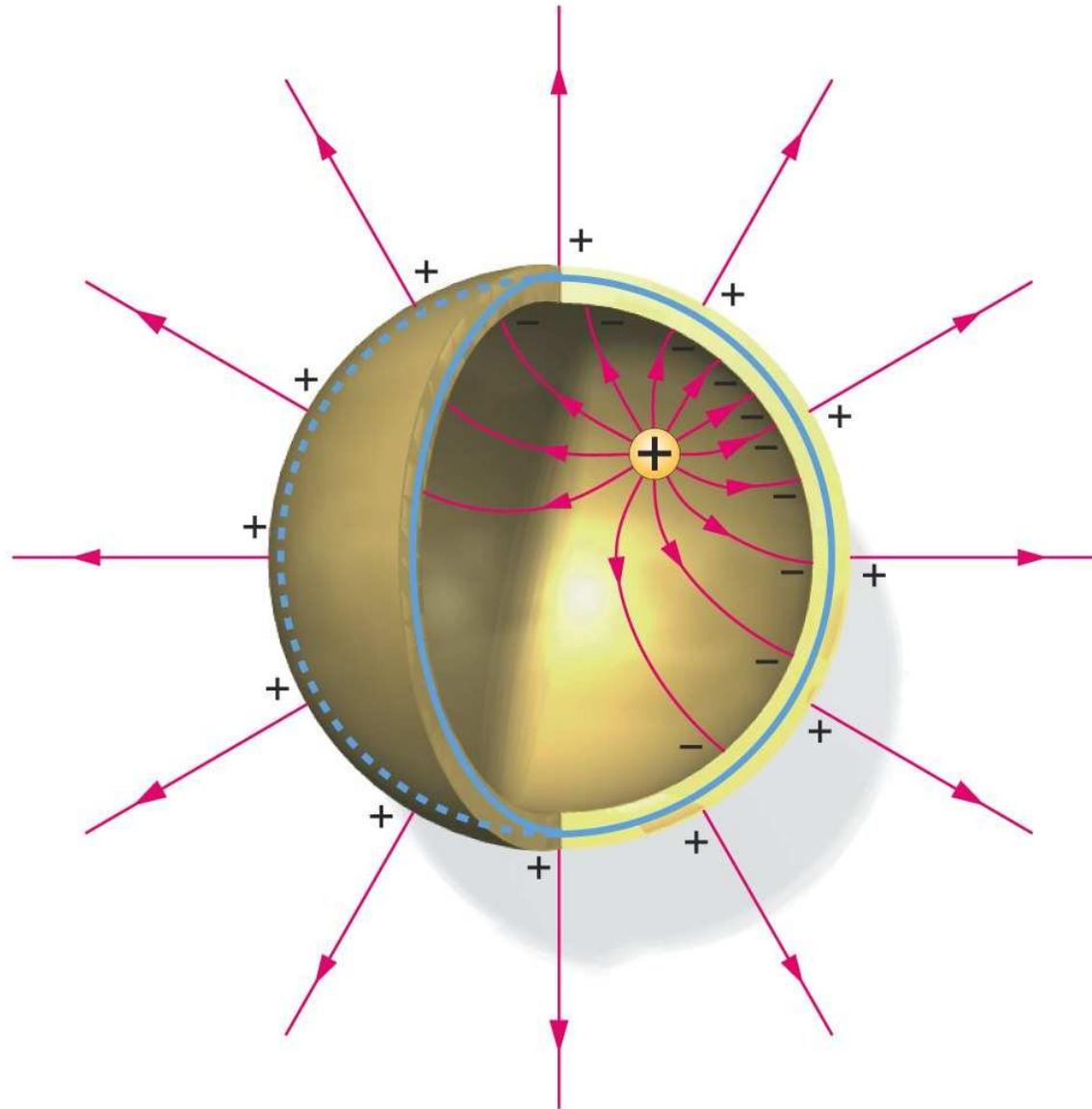
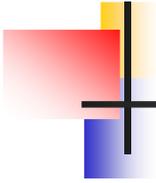
$$E_n = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

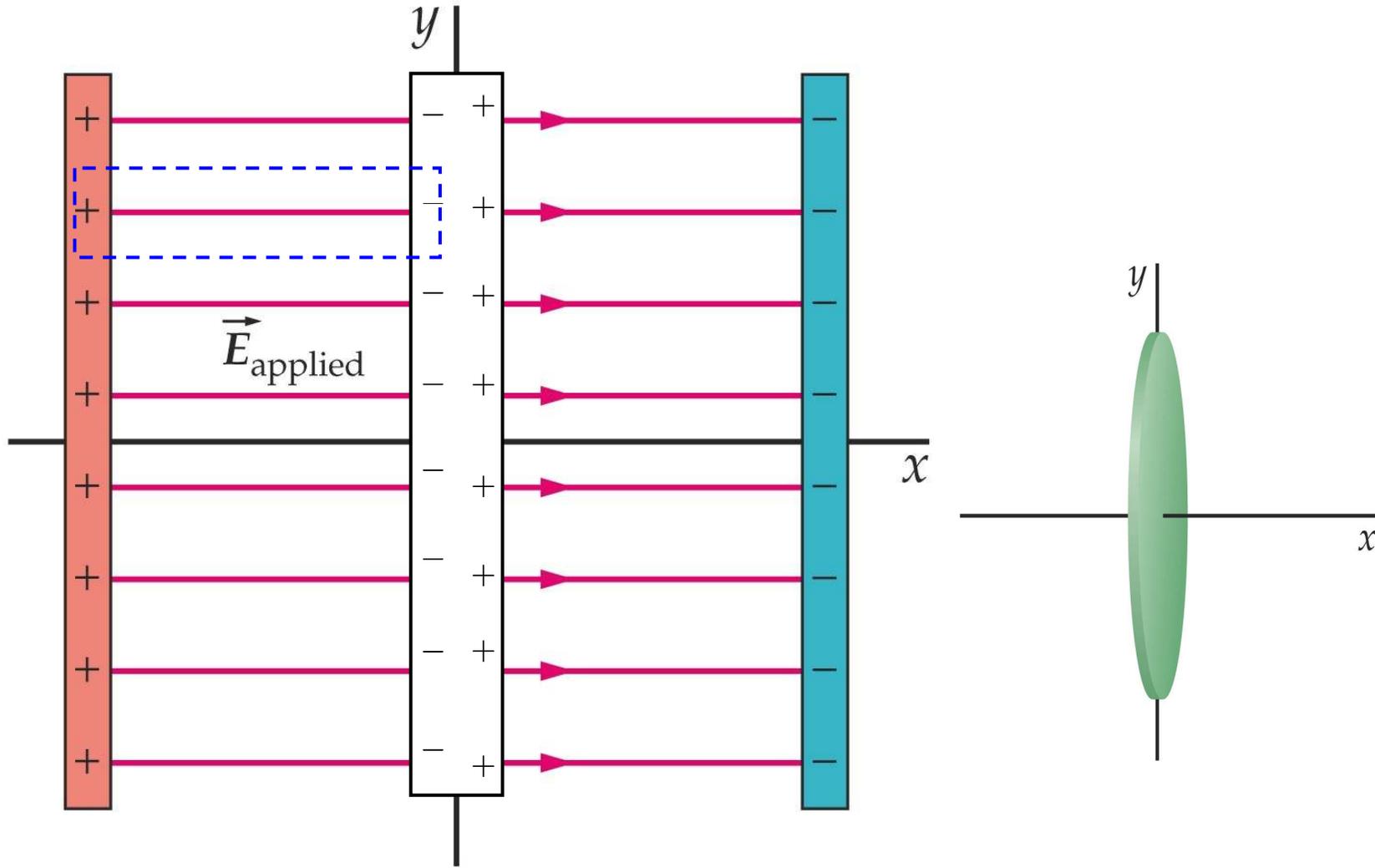
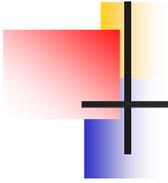
22-29

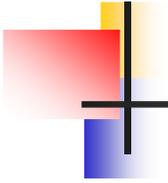
$E_n$  JUST OUTSIDE THE SURFACE OF A CONDUCTOR



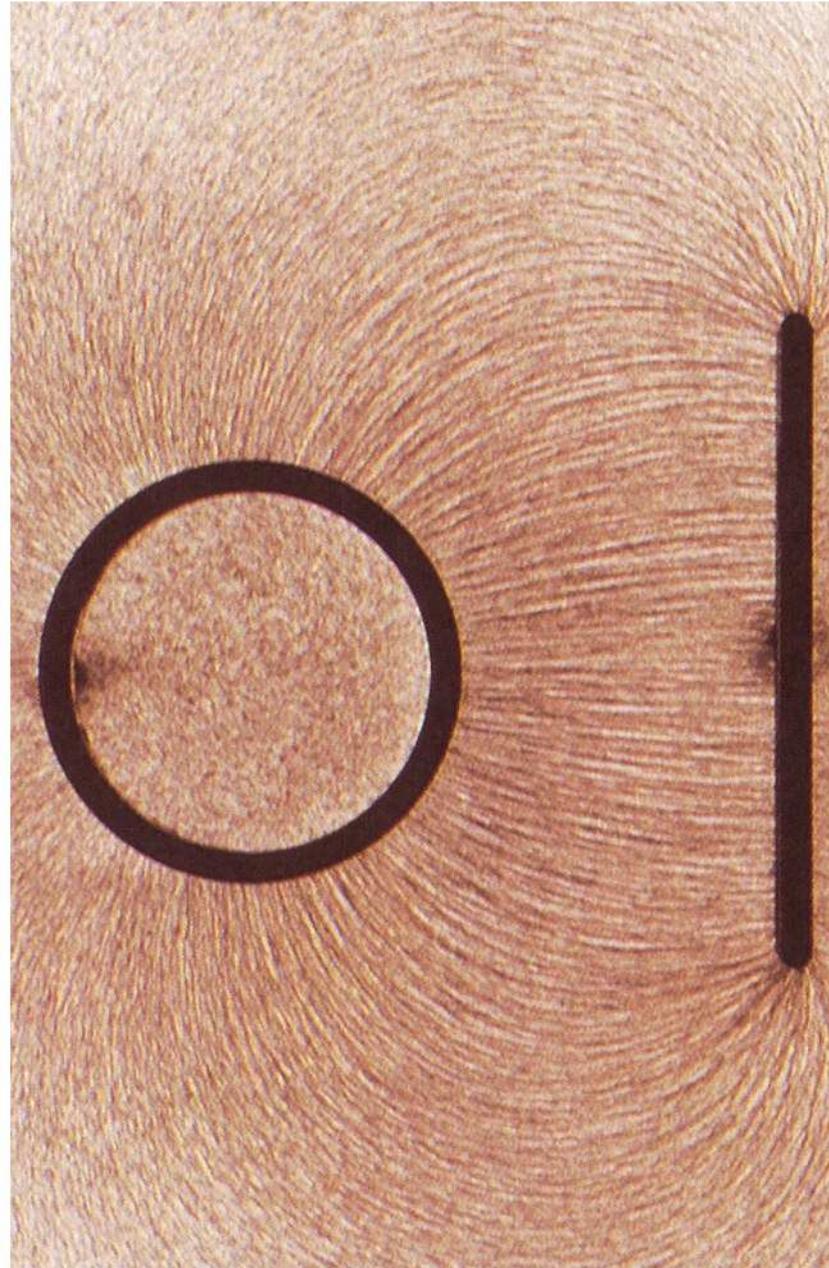


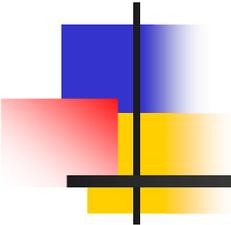






Pla carregat i  
Cilindre conductor

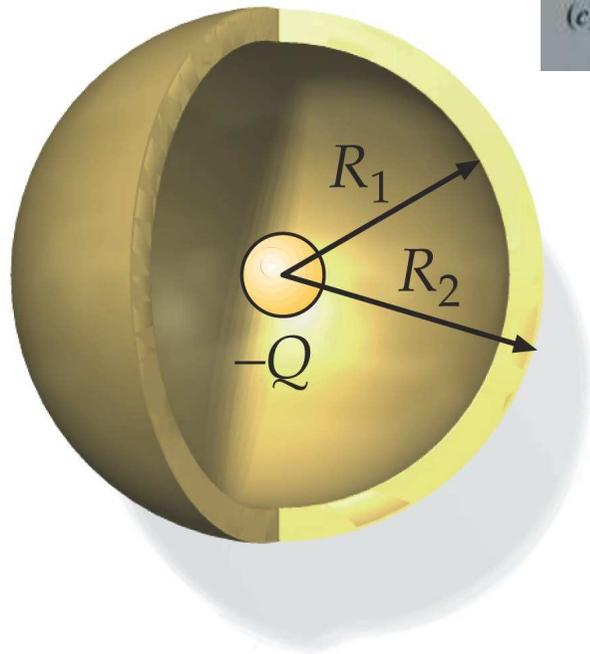




# Problemes

---

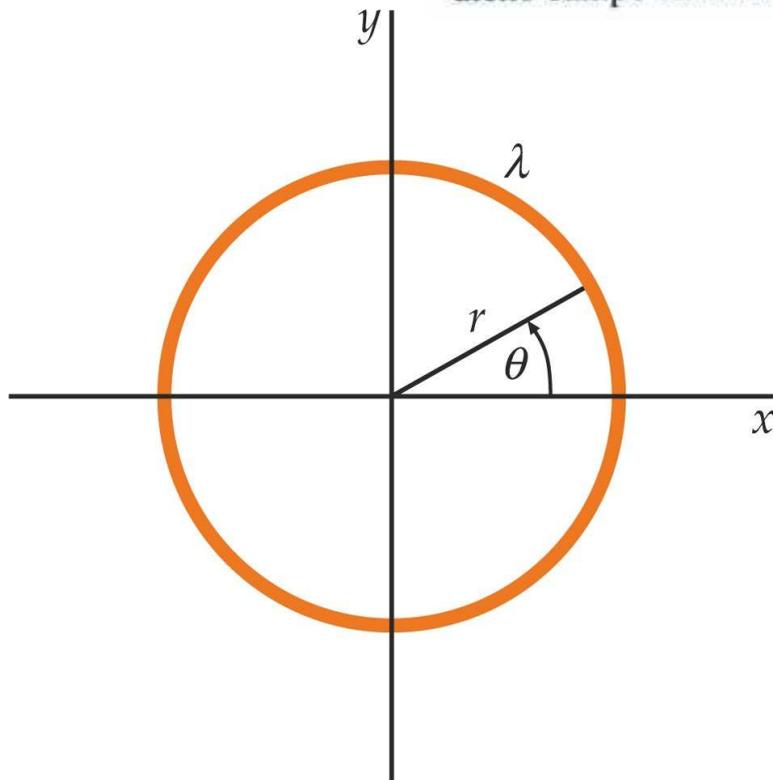
22.7



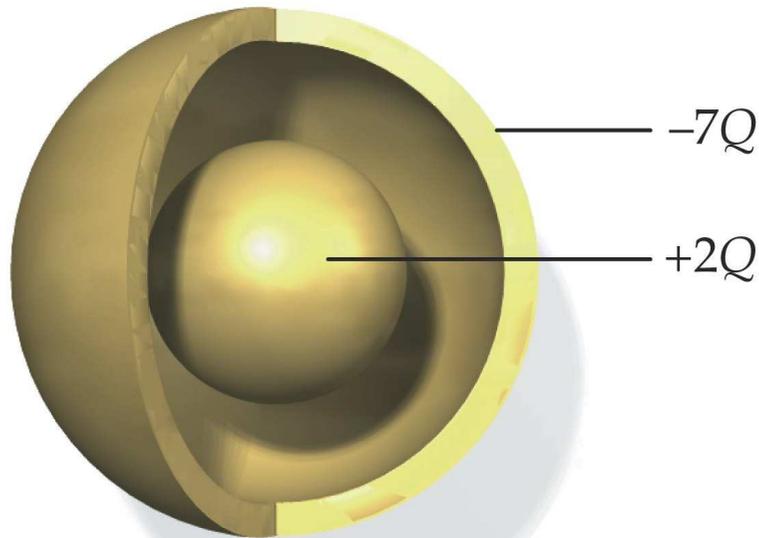
7 • Una carga puntual  $-Q$  se encuentra en el centro de una corteza esférica conductora de radio interior  $R_1$  y radio exterior  $R_2$  como indica la figura 22.36. La carga en la superficie interna de la corteza es (a)  $+Q$ , (b) cero, (c)  $-Q$ , (d) dependiente de la carga total depositada en la corteza.

22.28

**28** ●● Un anillo de radio  $R$  contiene una distribución de carga lineal de la forma  $\lambda\theta = \lambda_0 \sin \theta$ , tal como muestra la figura 22.37. (a) ¿Qué dirección tiene el campo generado en el centro del anillo? (b) ¿Cuál es el módulo de dicho campo en el centro del anillo?



22.42

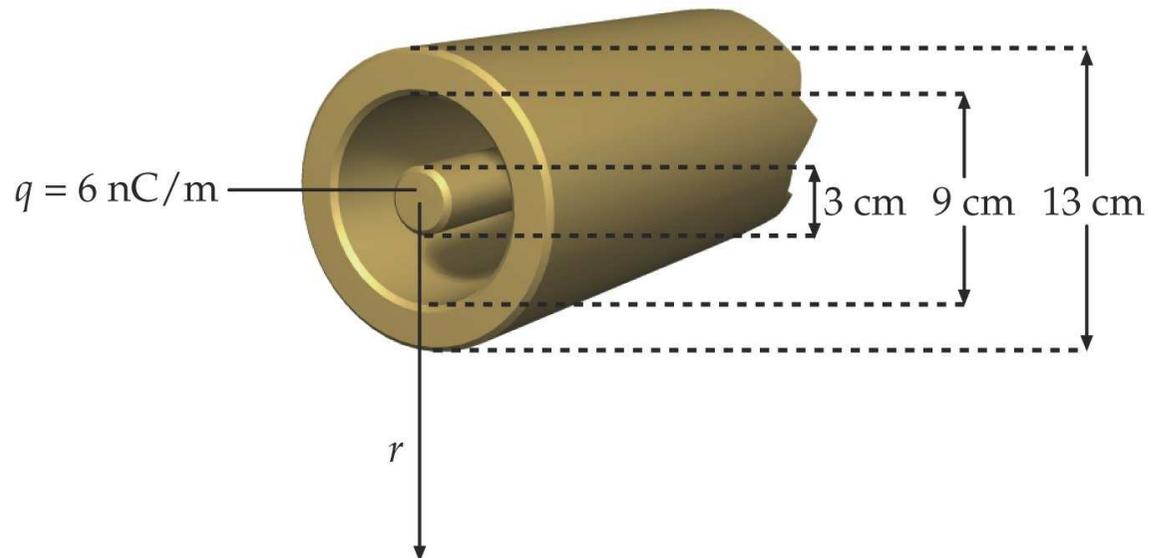


42 ●● SSM Consideremos dos esferas conductoras concéntricas (figura 22.38). La esfera exterior es hueca y en ella se ha depositado una carga  $-7Q$ . La esfera interior es sólida y en ella hay un depósito de carga  $+2Q$ . (a) ¿Cómo está distribuida la carga en la esfera exterior? Es decir, ¿cuánta carga hay en la superficie exterior y cuánta en la superficie interior? (b) Supongamos que se conecta un alambre entre ambas esferas. Una vez alcanzado el equilibrio electrostático, ¿cuánta carga total existe en la esfera exterior? ¿Cuánta carga

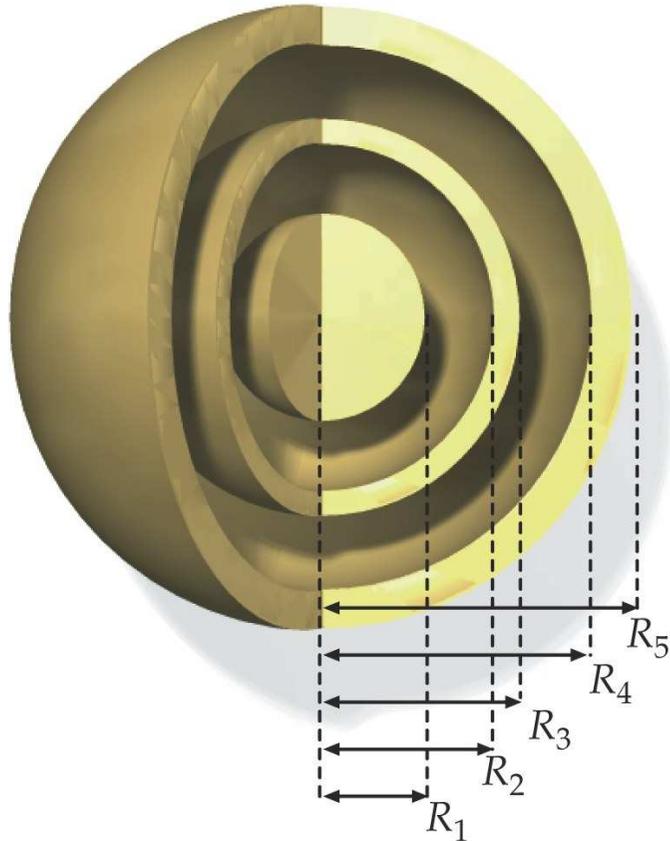
hay ahora en la superficie exterior de esta esfera y cuánta carga en su superficie interna? ¿Cambia el campo eléctrico de la superficie de la esfera interna al conectar el cable? Si es así, ¿cómo cambia? (c) Supongamos que volvemos a las condiciones iniciales de (a) con  $+2Q$  en la esfera interior y  $-7Q$  en la exterior. Conectamos ahora la esfera exterior a tierra con un cable y luego lo desconectamos. ¿Cuánta carga total existirá en la esfera exterior? ¿Cuánta carga tendremos en la superficie interna de la esfera exterior y cuánta en la superficie externa?

22.53

53 ●● i La figura 22.39 muestra la sección transversal de una porción de un cable concéntrico infinitamente largo. El conductor interno posee una carga de  $6 \text{ nC/m}$ ; el conductor externo está descargado. (a) Determinar el campo eléctrico para todos los valores de  $r$ , en donde  $r$  es la distancia desde el eje del sistema cilíndrico. (b) ¿Cuáles son las densidades superficiales de carga sobre las superficies interior y exterior del conductor externo?



22.66



66 ●● Consideremos las tres esferas metálicas concéntricas de la figura 22.40. La esfera I es sólida con el radio  $R_1$ . La esfera II es hueca con el radio  $R_2$  más interno y el radio  $R_3$  externo. La esfera III es hueca con radio  $R_4$  más interno y radio  $R_5$  externo. Inicialmente las tres esferas tienen una carga nula. A continuación añadimos una carga  $-Q_0$  en la esfera I y una carga positiva  $+Q_0$  en la esfera III. (a) Una vez que las cargas han alcanzado el equilibrio, el campo eléctrico en el espacio comprendido entre las esferas I y II, ¿está dirigido *hacia* el centro, *se aleja* del centro o ninguna de ambas cosas? (b) ¿Cuánta carga existirá en la superficie interna de la esfera II? Especificar su signo. (c) ¿Cuánta carga existirá en la superficie externa de la esfera II? (d) ¿Cuánta carga existirá en la superficie interna de la esfera III? (e) ¿Cuánta carga existirá en la superficie externa de la esfera III? (f) Representar  $E$  en función de  $r$ .

22.69

**69** ●● **SSM** Un capa esférica fina de radio  $r$  (figura 22.41a) tiene una carga total  $Q$ . Un pequeño trozo circular es extraído de la superficie. (a) ¿Cuál es el valor del módulo, dirección y sentido del campo eléctrico en el centro del hueco que deja el "tapón" extraído? (b) Utilizando el resultado del apartado (a), calcular la fuerza sobre "tapón" cuando se vuelve a colocar en el hueco (figura 22.41b). (c) A partir de estos últimos resultados, calcular la "presión electrostática" (fuerza/unidad de área) existente en toda la esfera.

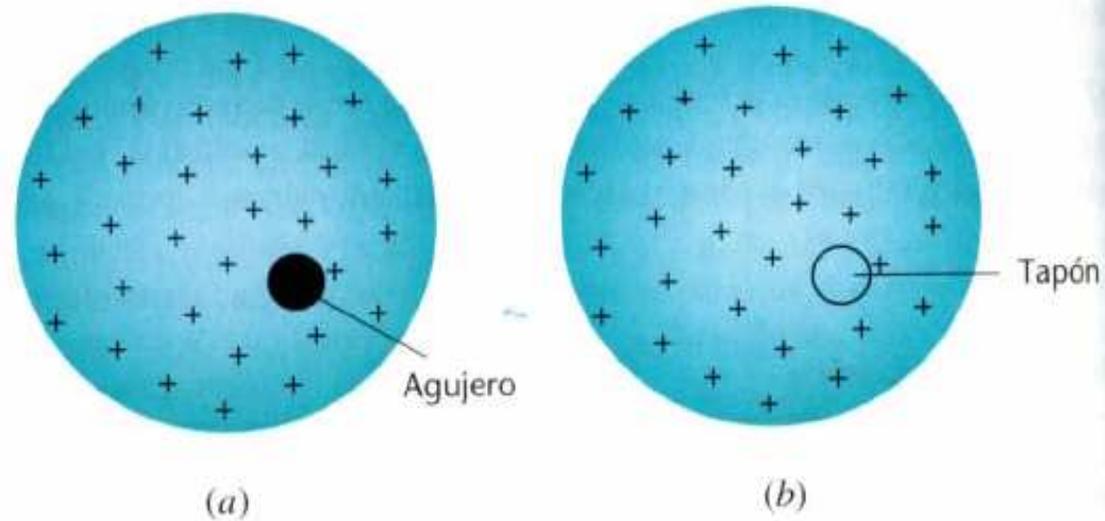
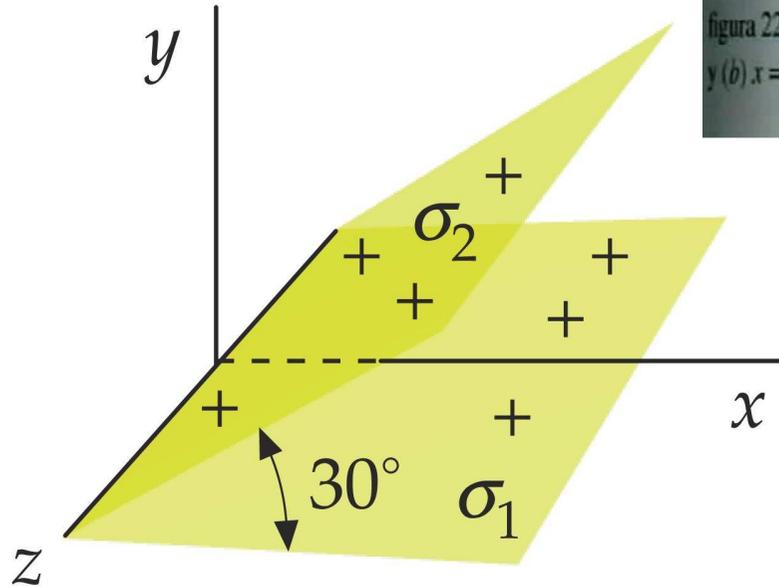


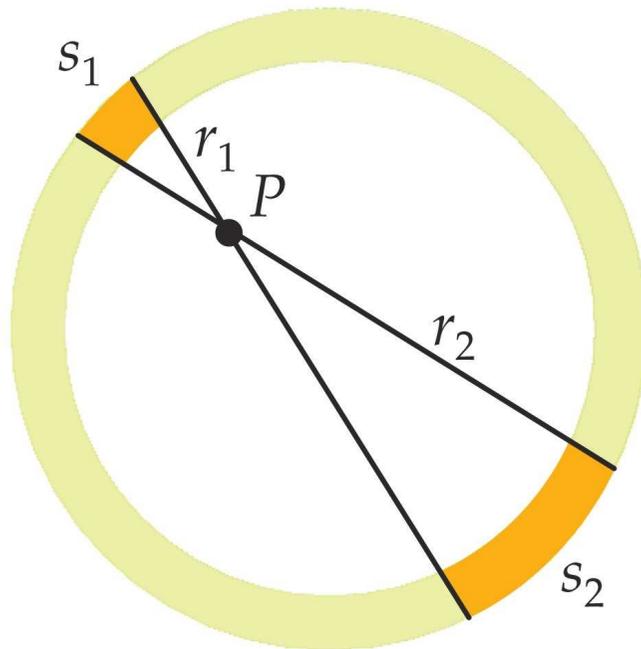
Figura 22.41 Problema 69

22.74



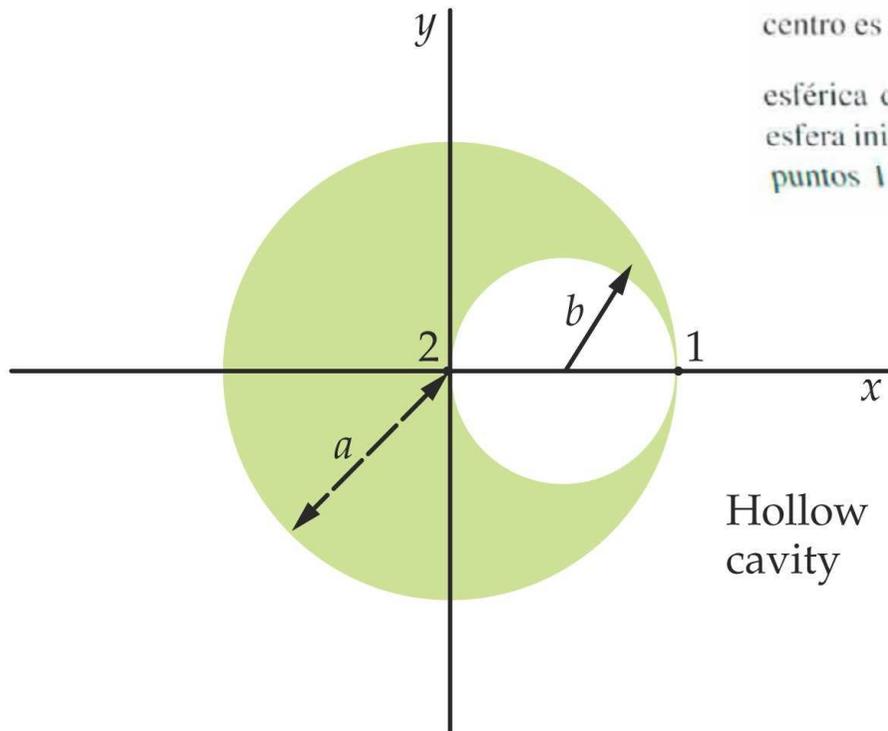
74 ●● **SOLVE** Un plano infinito situado en el plano de coordenadas  $xz$  posee una densidad de carga superficial uniforme  $\sigma_1 = 65 \text{ nC/m}^2$ . Un segundo plano infinito, portador de una densidad de carga uniforme  $\sigma_2 = 45 \text{ nC/m}^2$  corta el plano  $xz$  en el eje  $z$  y forma un ángulo de  $30^\circ$  con el plano  $xz$  como indica la figura 22.42. Determinar el campo eléctrico en el plano  $xy$  en (a)  $x = 6 \text{ m}$ ,  $y = 2 \text{ m}$  y (b)  $x = 6 \text{ m}$ ,  $y = 5 \text{ m}$ .

22.77



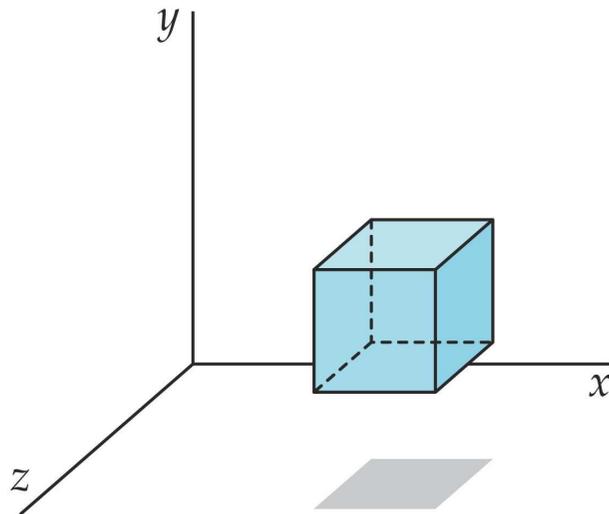
77 ●● Un anillo de radio  $R$  tiene una densidad de carga positiva uniforme  $\lambda$ . En la figura 22.43 se muestra un punto  $P$  que se encuentra en el plano del anillo pero que no es su centro. Considerar dos elementos del anillo, de longitudes  $s_1$  y  $s_2$  (indicados en la figura) y que se encuentran a las distancias  $r_1$  y  $r_2$  del punto  $P$ . (a) ¿Cuál es la relación entre las cargas de estos elementos? ¿Cuál de ellas genera un campo mayor en el punto  $P$ ? (b) ¿Cuál es la dirección del campo debido a cada uno de estos elementos en el punto  $P$ ? ¿Cuál es la dirección del campo eléctrico total en el punto  $P$ ? (c) Suponer que el campo eléctrico debido a una carga puntual varía en la forma  $1/r$  en lugar de  $1/r^2$ . ¿Cuál sería el campo eléctrico en el punto  $P$  debido a los elementos que se muestran? (d) ¿Qué diferencias existirían en las respuestas dadas si el punto  $P$  se encontrara en el interior de una corteza con una distribución uniforme de carga esférica y en la que el área de los elementos fuera  $s_1$  y  $s_2$ ?

22.87



- 87 ●● Una esfera no conductora de radio  $a$  y con centro en el origen está uniformemente cargada con una distribución de carga  $\rho$ . (a) Demostrar que el campo eléctrico en un punto del interior de dicha esfera a una distancia  $r$  del centro es  $\mathbf{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r \hat{\mathbf{r}}$ . (b) Se extrae un trozo de la esfera, dejando una cavidad esférica de radio  $b = a/2$ , cuyo centro está a una distancia  $b = a/2$  del de la esfera inicial, tal como indica la figura 22.44. Calcular el campo eléctrico en los puntos 1 y 2 mostrados en la figura 22.44. (Sugerencia Reemplazar el con-

## 22.92



**92** ●●● Una pequeña superficie gaussiana en forma de cubo con caras paralelas a los planos  $xy$ ,  $xz$  e  $yz$  (figura 22.45) está en una región en la que el campo eléctrico es paralelo al eje  $x$ . Usando la serie de Taylor y despreciando términos superiores al primero, demostrar que el flujo neto del campo eléctrico que sale de la superficie gaussiana viene dado por

$$\phi_{\text{neto}} = \frac{\partial E_x}{\partial x} \Delta V$$

donde  $\Delta V$  es el volumen limitado por la superficie gaussiana

*Observación* Para situaciones en las que la dirección del campo no quede restringida a una dimensión, el flujo neto es

$$\phi_{\text{neto}} = \left( \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) \Delta V$$

22.95

95 ●● Un modelo simple pero sorprendentemente preciso de una molécula de hidrógeno es aquél que considera dos cargas puntuales de carga  $+e$  colocadas en el interior de una esfera de radio  $R$  que contiene una carga  $-2e$  uniformemente distribuida en todo el volumen de la misma. Los dos puntos se colocan simétricamente con respecto al centro tal como indica la figura 22.46. Encontrar la distancia  $a$ , medida desde el centro, donde la fuerza neta sobre cualquier carga es cero.

