

TEORIA DE CIRCUITS

TEMA 4. Régimen Permanente Senoidal

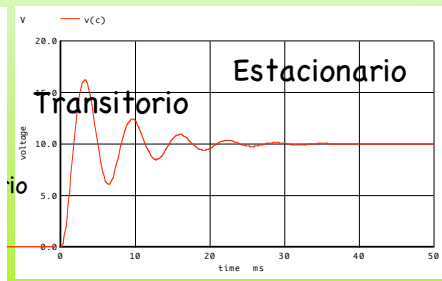
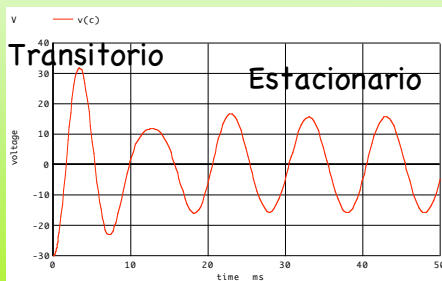
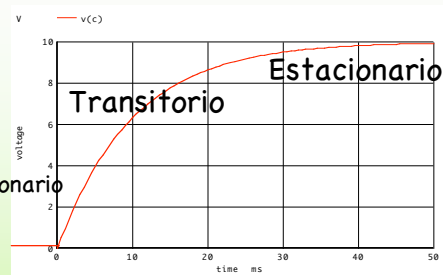
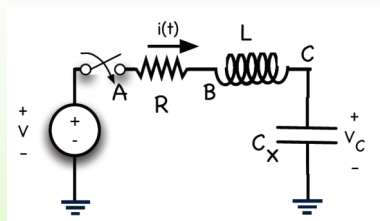
José Luis Rosselló
Abril 2011

Régimen permanente senoidal

- Fuente senoidal
- Utilización de fasores
- Impedancias
- Circuito transformado
- Análisis frecuencial
- Diagramas de Bode

Características temporales

- Inicialmente las señales pasan por un período transitorio
- Pasado este período la señal se estabiliza y pasa a un estado estacionario



Régimen permanente senoidal

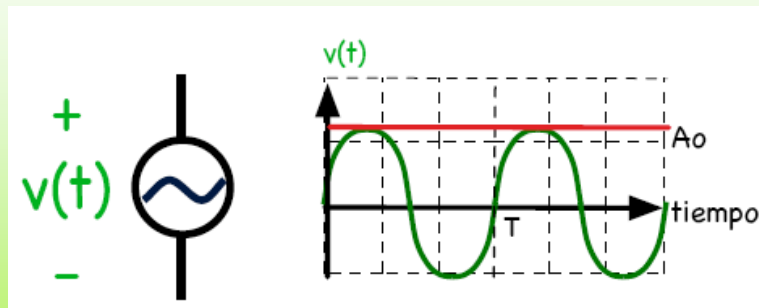
- Fuentes de tensión o de corriente que oscilan de forma uniforme (señales senoidales)
- Señales senoidales. Características:
 $A \cdot \cos(\omega t + \phi)$
 - Período de oscilación (T)
 - Frecuencia ($f=1/T$)
 - Frecuencia angular ($\omega = 2\pi/T$) si expresamos el coseno en radianes, $\omega=360/T$ si expresamos el coseno en grados
 - Amplitud (A)
 - Amplitud eficaz ($A_{\text{eff}}=A/\sqrt{2}$)
 - Valor de pico a pico ($2A$)
 - Fase ϕ

Ejercicio propuesto 4.1

- Determinar: período, valor eficaz, fase, frecuencia y frecuencia angular de la siguiente función temporal:

$$v(t) = 10 \cos(5t - \pi)$$

Fuente oscilante

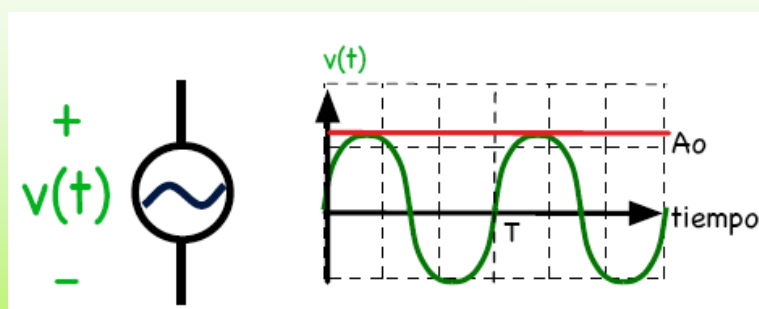


$$V(t) = A \cdot \sin(\omega t)$$

FORMATO SPICE

VX A B sin (<offset> <amplitud> <frecuencia>)

Ejemplo: Corriente alterna



$$V_{\text{eff}} = 220\text{V} \quad f = 50\text{Hz} \Rightarrow A_o = 311.12\text{V} \quad T = 20\text{ms}$$

FORMATO SPICE

VX A B sin (0 311.12 50)

Características del RPS

- Cualquier suma de senos y cosenos de la misma frecuencia ω puede expresarse de la forma $A \cos(\omega t + \phi)$

$$A_1 \cos(\omega t + \phi_1) + A_2 \cos(\omega t + \phi_2) + \dots + B_1 \cos(\omega t + \beta_1) + B_2 \cos(\omega t + \beta_2) = A_0 \cos(\omega t + \phi)$$

- La respuesta de un circuito lineal a una estimulación senoidal es otra función senoidal

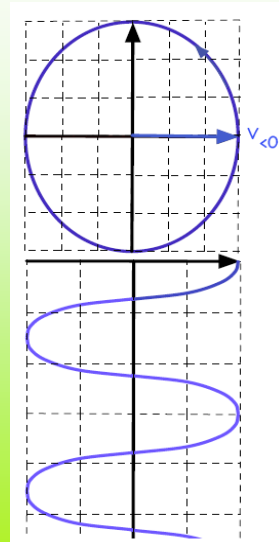
Representación fasorial de señales senoidales

Señal senoidal definida por módulo y fase.

Creación del FASOR

Utiliza valor máximo A ó el valor eficaz A_{eff}

$$A \cos(\omega t + \phi) \Rightarrow A_{\angle \phi} \text{ ó } A_{\text{eff}} \angle \phi$$



Representación fasorial de señales senoidales

Señal senoidal definida por módulo y fase

$$A \cdot \cos(\omega t + \phi) \Rightarrow$$

Representación fasorial ó polar:

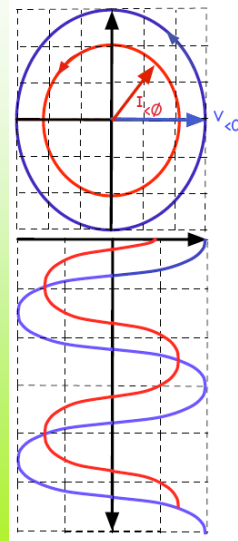
$$A \angle \phi$$

Representación cartesiana:

$$a + jb = A \cdot \cos \phi + jA \cdot \sin \phi$$

Ej. representar $10 \cos(\omega t - \pi/2)$

$$10 \angle -\pi/4 \text{ ó } 10 \angle -45^\circ = 5\sqrt{2} - j5\sqrt{2}$$



Ejercicio propuesto 4.2

- Expresar y representar gráficamente el fasor de la siguiente señal:

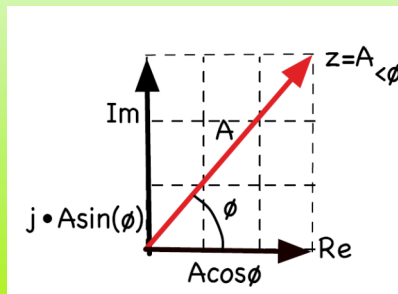
$$i(t) = 10 \cos(5t - \pi)$$

Reglas de transformación

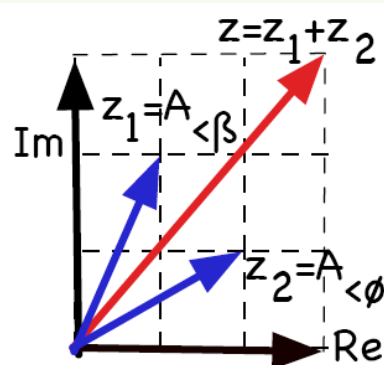
$$A \cdot \cos(\omega t + \phi) \Rightarrow A_{\angle \phi}$$

$$A_{\angle \phi} = A \cos(\phi) + j A \sin(\phi)$$

$$c + jd = (c^2 + d^2)^{1/2} \angle \arctan(d/c)$$

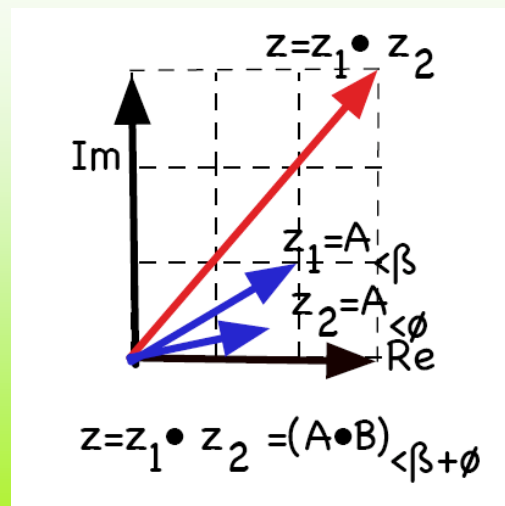


Suma de complejos

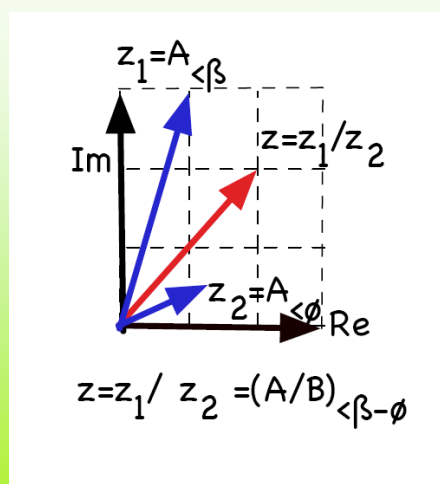


$$z = z_1 + z_2 = \text{Re}(z_1) + \text{Re}(z_2) + j[\text{Im}(z_1) + \text{Im}(z_2)]$$

Multiplicación de complejos



División de complejos



Ejemplo:

$$y_1(t) = 2\cos(\omega t + 0.1) \quad \Rightarrow z_1 = 2 \angle 0.1$$

$$y_2(t) = \cos(\omega t + 1) \quad \Rightarrow z_2 = 1 \angle 1$$

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = B \cos(\omega t + \phi) \quad \text{Buscar } B \text{ i } \phi$$

$$z_1 + z_2 = 2\cos(0.1) + \cos(1) + j(2\sin(0.1) + \sin(1))$$

$$z_1 + z_2 = 2.53 + j1.04 = 2.73 \angle 0.39$$

Per tant:

$$2\cos(\omega t + 0.1) + \cos(\omega t + 1) = 2.73\cos(\omega t + 0.39)$$

Ejercicio propuesto 4.3

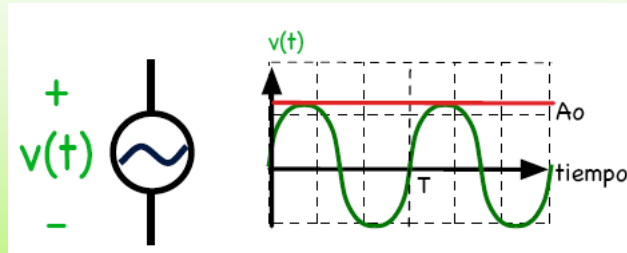
- Realiza las siguientes operaciones de fasores $z_1 + z_2$ y z_3^5 (ten en cuenta que las fases de z_1 y z_2 están expresadas en radianes) y obtén el fasor resultante

$$z_1 = 2 \angle 0.1$$

$$z_2 = 4 \angle 0.5$$

$$z_3 = 4 - 3j$$

Ejemplo: Fasor de fuente de tensión

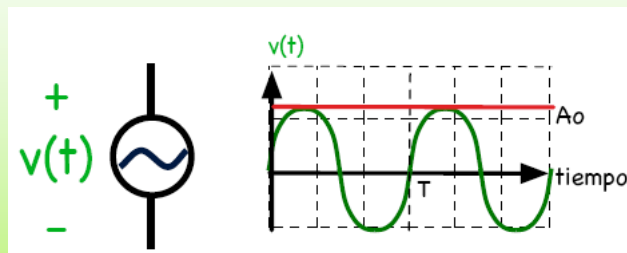


$$v(t) = A \cdot \sin(\omega t) = A \cdot \cos(\omega t - 90^\circ)$$

si $\omega = \text{grados/sec.}$

$$V = A \angle -90^\circ$$

Ejemplo: Fasor de fuente de tensión

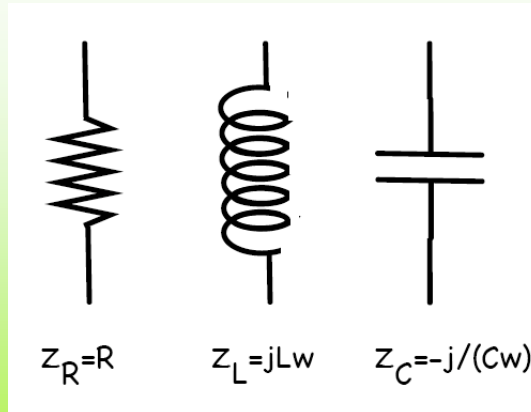


$$v(t) = A \cdot \sin(\omega t) = A \cdot \cos(\omega t - \pi/2)$$

si $\omega = \text{radianes / sec.}$

$$V = A \angle -\pi/2$$

Análisis de circuitos en RPS: Utilización de Impedancias

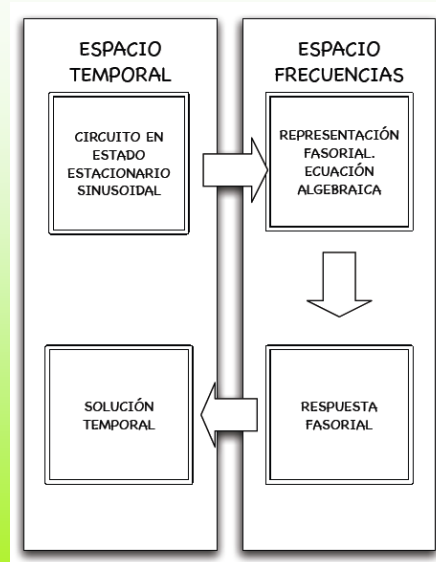


Son el resultado de substituir el parámetro 's' por $j\omega$ y suponer condiciones iniciales nulas

Análisis mediante fasores

- Se aplican los mismos métodos
 - Ley Ohm $V=IZ$
 - Leyes Kirchhoff
 - Transformación fuentes
 - Superposición
 - Thevenin y Norton
 - ...

Resolución circuitos en RPS



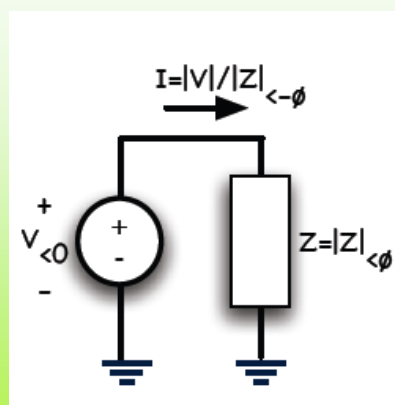
Relación corriente-voltaje

Se cumple que:

$$v(t) = V \cdot \cos(\omega t) \Rightarrow V_{<0}$$

$$I = V/Z \Rightarrow (V/|Z|)_{<-\phi}$$

$$i(t) = (V/|Z|) \cdot \cos(\omega t - \phi)$$



Corriente en una resistencia ($Z=R_{<0}$)

$$v(t)=V\cos(\omega t)$$

$$i_R(t)=(V/R)\cos(\omega t)$$

$$P(t)=v(t)i_R(t)=(V^2/R)\cos^2(\omega t)$$

$$P(t)=(1+\cos(2\omega t))\cdot V^2/(2R)$$

$$P_{med}(t)=V^2/(2R)=V_{eff}\cdot I_{eff}$$

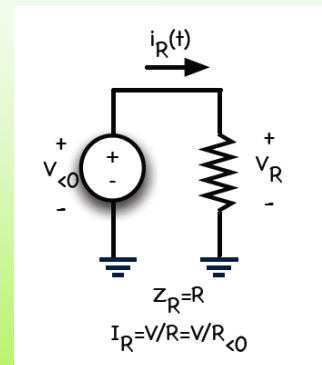
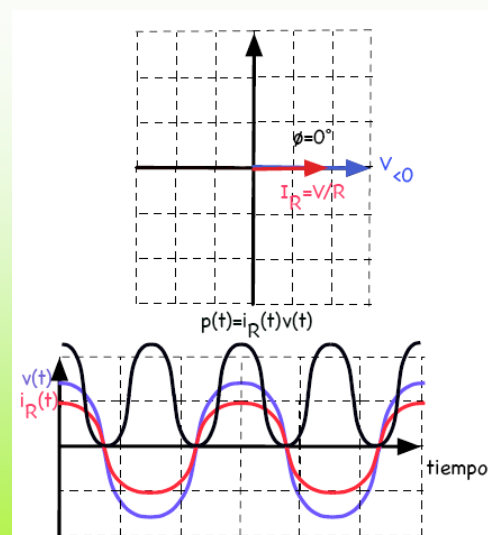


Diagrama fasorial

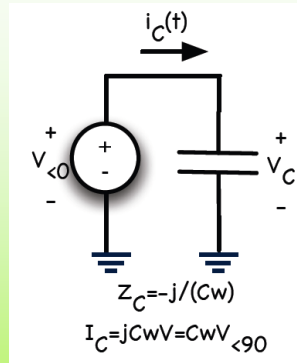
La Potencia media es
 $P=IV=IV/2$

La corriente está en
fase respecto la
tensión

La potencia presenta
una frecuencia de 2ω



Corriente en una capacidad

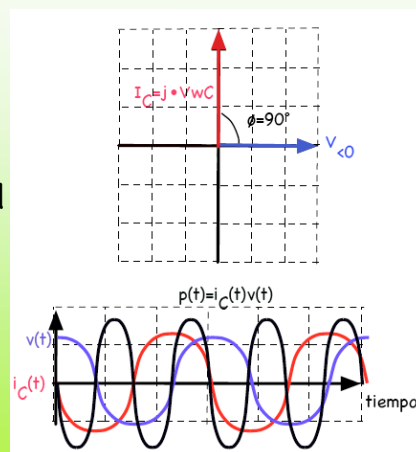


$$v(t) = V \cdot \cos(\omega t)$$

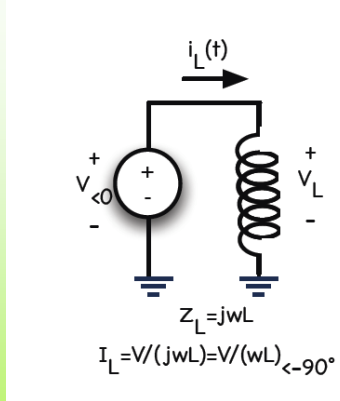
$$i_C(t) = \omega C V \cdot \cos(\omega t + 90^\circ)$$

Diagrama fasorial

La Potencia media es
cero en la capacidad
La corriente está
avanzada respecto
la tensión



Corriente en una bobina



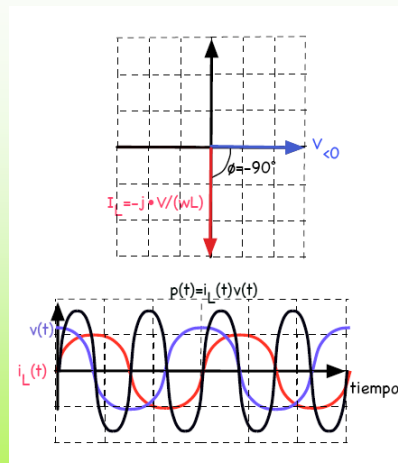
$$v(t) = V \cos(\omega t)$$

$$i_L(t) = [V/(\omega L)] \cos(\omega t - 90^\circ)$$

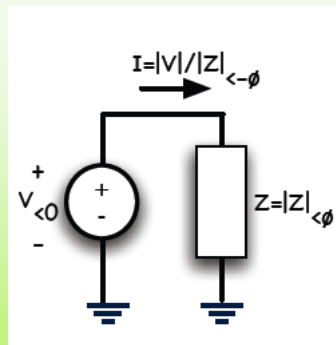
Diagrama fasorial

La Potencia media es
cero

La corriente está
retrasada respecto
la tensión



Corriente en una impedancia



$$v(t) = V \cos(\omega t)$$

$$i(t) = (V/|Z|) \cos(\omega t - \phi)$$

Diagrama fasorial

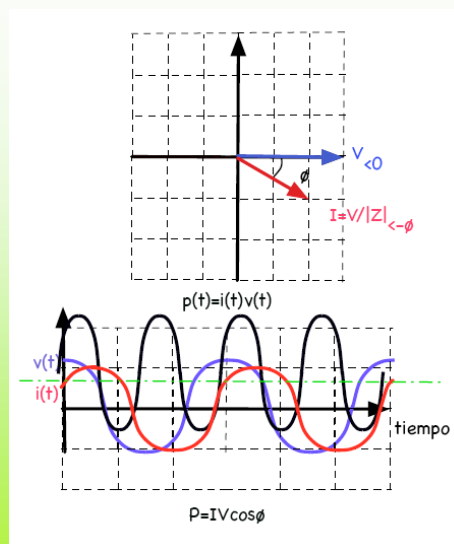
La corriente está retrasada un tiempo $t_0 = T \cdot \phi / (2\pi)$ respecto la tensión

La Potencia media es
 $P = I_{\text{eff}} V_{\text{eff}} \cos \phi = (IV/2) \cdot \cos \phi$

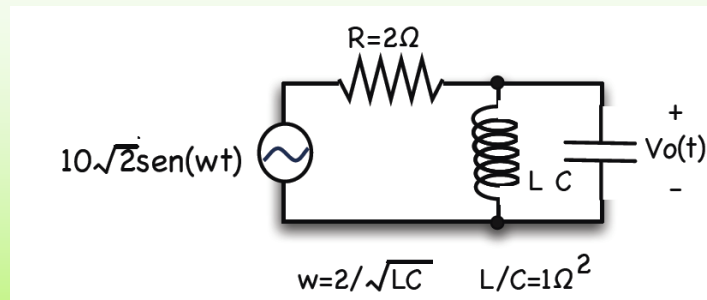
A $\cos \phi$ se le llama factor de potencia

Si $Z = R + jX$ entonces $P = RI_{\text{eff}}^2$

R es la parte resistiva de Z
 X es la parte reactiva de Z

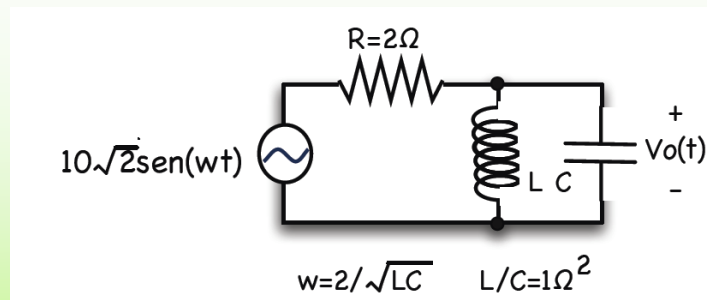


Ejemplo de circuito RLC



- Calcular el fasor de V_o y la función temporal $V_o(t)$

Ejemplo de circuito RLC



$$V_o = V \cdot (Z_C || Z_L) / (Z_C || Z_L + R)$$

$$Z_C || Z_L = -2 \cdot j/3 \quad V = 10\sqrt{2} \angle -\pi/2$$

$$V_o = j10\sqrt{2}(2j/3)/(2-2j/3) = (-3-j)\sqrt{2} = \sqrt{20} \angle -2.82$$

$$V_o(t) = \sqrt{20} \cos(\omega t - 2.82)$$

Ejemplo: Circuito RLC serie

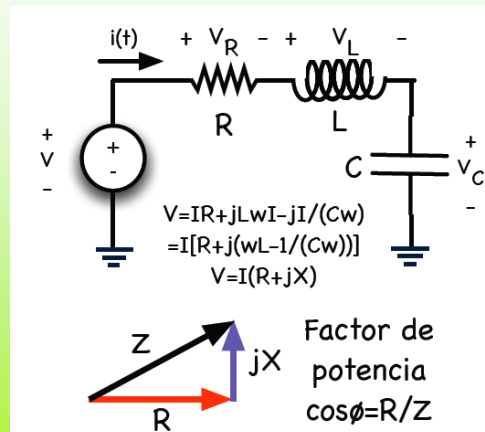
$$I = V/Z$$

$$|I| = |V|/|Z|$$

$$|I| = \frac{|V|}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$$

Corriente máxima si

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$



Ejemplo: Circuito RLC serie

Ej. $R=1\Omega$ $L\omega=100\Omega$

$$1/C\omega = 100\Omega$$

$$V=100_{<0}$$

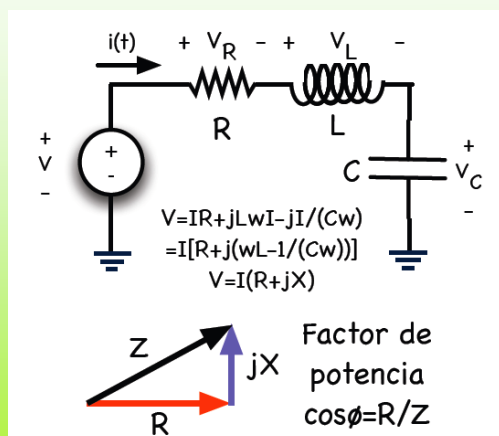
$$I=100_{<0}$$

$$V_R=100_{<0}$$

$$V_L=10^4_{<90}$$

$$V_C=10^4_{<-90}$$

V_C y V_L desfasadas 180°



Ejemplo: Circuito RLC paralelo

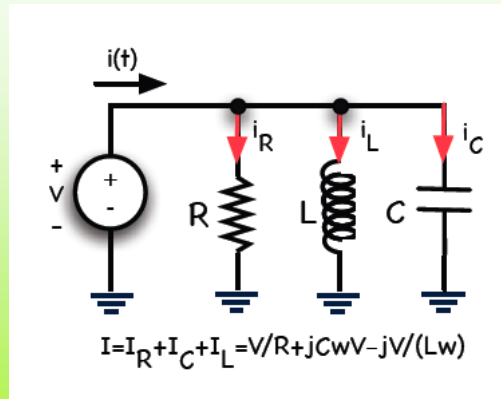
$$I = V/Z = V/(R \parallel Z_L \parallel Z_C)$$

$$|I| = |V| \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2}$$

Corriente mínima si

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

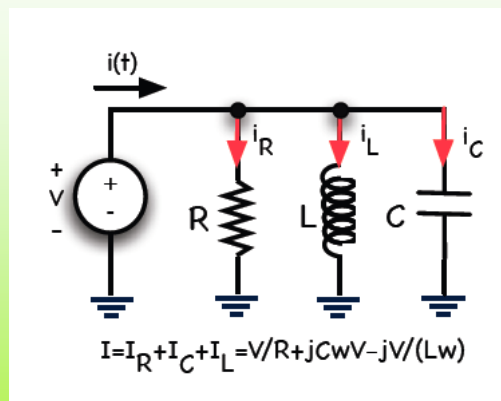
(antirresonancia)



Ejemplo: Circuito RLC paralelo

Ej. $R=1\Omega$ $1/(L\omega)=100\Omega$
 $C\omega=100$ $V=100_{<0}$

$I=100_{<0}$
 $I_R=100_{<0}$
 $I_L=10^4_{<-90}$
 $I_C=10^4_{<90}$



Triángulo de potencias

$$V_{eff} = I_{eff} Z$$

$$Z = R + jX$$

$$Z = |Z| \angle \phi$$

$$I_{eff} = |I_{eff}| \angle -\phi$$

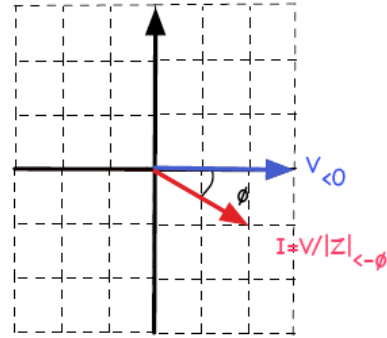
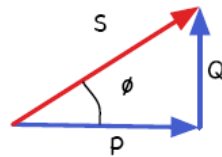
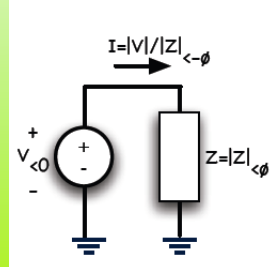
Potencia compleja

$$V_{eff} I_{eff}^* = P + jQ = S$$

P => Potencia Activa

Q => Potencia Reactiva

S => Potencia Aparente



$$p(t) = v(t)i(t) = V \cos(\omega t) \cos(\omega t - \phi)$$

$$p(t) = V \cos(\phi) [1/2 + \cos(2\omega t)/2 - \cos(\omega t) \sin(\omega t) \tan(\phi)]$$

$$P = V I \cos(\phi) / 2$$

$$S = V I^* / 2 = P + jQ = V I / 2 \cos(\phi) + j V I / 2 \sin(\phi)$$

Diagrama fasorial

P => Potencia Activa

$$P = |V_{eff}| |I_{eff}| \cos \phi = R |I_{eff}|^2$$

Wattios

Q => Potencia Reactiva

$$Q = |V_{eff}| |I_{eff}| \sin \phi = X |I_{eff}|^2$$

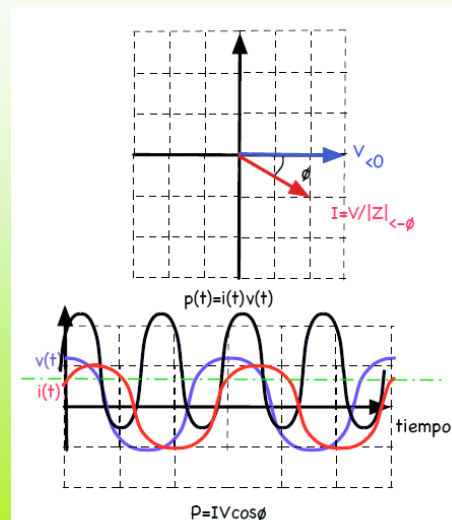
VAR

S => Potencia Aparente

$$|S| = |I_{eff}|^* |V_{eff}|$$

VA

$\cos \phi$ => Factor potencia



Ejemplo: transmisión tensión

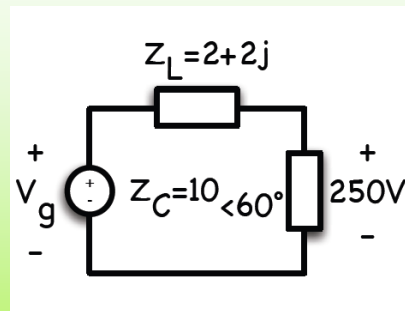
Carga con gran componente inductivo (fase positiva)

$$I_{\text{eff}} = 250 / 10_{\angle 60^\circ} = 25_{\angle -60^\circ}$$

$$P_L = R |I_{\text{eff}}|^2 = 2 \cdot 25^2 = 1.25 \text{ kW}$$

$$V_{g,\text{eff}} = Z_L I_{\text{eff}} + 250_{\angle 0^\circ} = 319_{\angle -3.3^\circ}$$

Factor de potencia = $\cos \phi = 0.5$



Corrección del factor de potencia

Ponemos en paralelo un condensador que nos anule el componente inductivo de la carga de forma que $Z_C || jY$ sea real $Z_C || jY = a + j0$

$$Y = -20 / \sqrt{3} \Rightarrow \cos \phi = 1$$

$$Z_C || jY = 20 \Omega$$

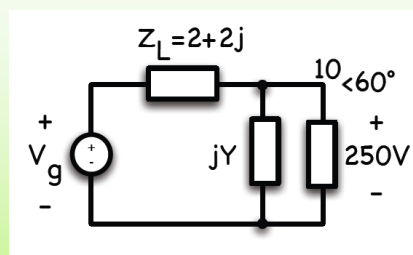
Para este caso tenemos:

$$I_{\text{eff}} = 250_{\angle 0^\circ} / 20_{\angle 0^\circ} = 12.5_{\angle 0^\circ} \text{ A}$$

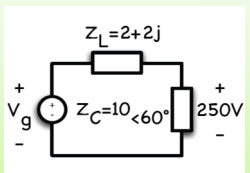
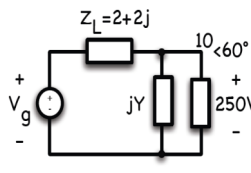
$$P_L = R |I_{\text{eff}}|^2 = 2 \cdot 12.5^2 = 312.5 \text{ W}$$

$$V_g = Z_L I + 250_{\angle 0^\circ} = 276_{\angle -5.2^\circ}$$

$$\cos \phi = 1$$



Corrección del factor de potencia

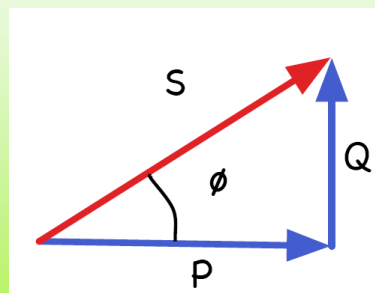
		
I	25	12,5
P_L	1250	312,5
V_g	319	276

Factor de potencia

$$S = I_{\text{eff}} V_{\text{eff}}^* = P + jQ$$

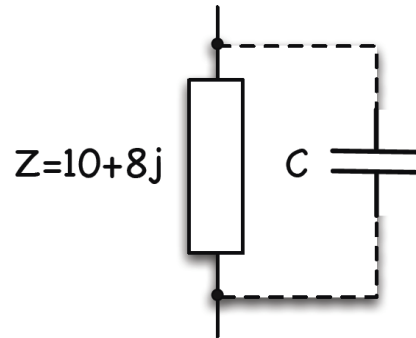
$$P = |I_{\text{eff}}| |V_{\text{eff}}| \cos \phi$$

Si $\cos \phi$ es bajo $\Rightarrow$ Para suministrar potencia a una determinada tensión necesitaremos corriente más alta $\Rightarrow$ más tensión $\Rightarrow$ más costos por pérdidas en líneas y desgaste en aislantes. Por tanto, hay que mantener el factor de potencia ($\cos \phi$) lo más cercano a 1 posible



Problema propuesto 4.5

- Calcula el valor de C que maximice el factor de potencia ($\cos\phi=1$) de todo el sistema. Supón una frecuencia de oscilación de 50Hz.



Teorema de transferencia de máxima potencia

