

Annex matemàtic I:**Sistemes LTI analògics descrits per equacions diferencials de 2on ordre**

Sigui un sistema definit per la següent equació diferencial d'ordre 2 amb una sola entrada $x(t)$:

$$a_0 y^{(2)}(t) + a_1 y^{(1)}(t) + a_2 y(t) = x(t)$$

amb condicions inicials $y^{(2)}(0)$, $y^{(1)}(0)$, $y(0)$

Resposta total = Resposta natural (transitòria*) + Resposta forçada (estat estacionari*)

$$y(t) = y_N(t) + y_F(t)$$

Resposta natural:

Depèn només dels detalls del sistema i és independent de la naturalesa de l'entrada. Es troba a partir de l'equació característica o polinomi característic definit per:

$$a_0 s^2 + a_1 s + a_2 = 0$$

Arrel del polinomi característic	Forma de la resposta natural $y_N(t)$
Real i diferent: r	Ke^{rt}
Conjugada complexa: $\beta \pm j\omega$	$e^{\beta t} [K_1 \cos(\omega t) + K_2 \sin(\omega t)]$
Real doble: r^2	$e^{rt} (K_0 + K_1 t)$

Aquestes constants es determinen a partir de les condicions inicials, però només després d'establir la resposta total.

Resposta forçada:

És producte de la interacció del sistema amb l'entrada. Les constants de la resposta forçada es poden trobar de manera única i independent de la resposta natural o condicions inicials, complint simplement l'equació diferencial donada.

Entrada	Forma de la funció forçada $y_F(t)$
C_0 (constant)	C_1 (una altra constant)
e^{at}	$C \cdot e^{at}$
$\cos(\omega t + \beta)$	$C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$ o $C \cos(\omega t + \theta)$

Resposta total:

Es troba afegint primer la resposta natural i forçada i avaluant després les constants indeterminades (en la component natural) utilitzant les condicions inicials.

* Per sistemes estables

Annex matemàtic II:**Transformada de Laplace**

Taula amb algunes propietats i parelles de transformades de Laplace molt utilitzades en l'anàlisi de circuit elèctrics.

f(t)	L{f(t)}	f(t)	L{f(t)}
$\delta(t)$	1	$u(t)$	$\frac{1}{s}; s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}; s > a$	t	$\frac{1}{s^2}; s > 0$
$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2 + a^2}; s > 0$	$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2 + a^2}; s > 0$
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}; s > a$	$e^{at} \sin(kt)$	$\frac{k}{(s-a)^2 + k^2}; s > a$
$e^{at} \cos(kt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + k^2}; s > a$	$t^n; n = \{1, 2, \dots\}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}; s > 0$
$2 K e^{at} \cos(\beta t + \arg K)$	$\frac{K}{s-\alpha-j\beta} + \frac{K^*}{s-\alpha+j\beta}$		
$cf(t)$	$cF(s)$		
$f_1(t) + f_2(t)$	$F_1(s) + F_2(s)$		
$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$		
$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$		
$t^n f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$		
$e^{at} f(t)$	$F(s-a)$		
$\delta(t-a)$	e^{-as}		

$$\cos(t + \theta) = \cos t \cdot \cos \theta - \sin t \cdot \sin \theta$$

Transformada inversa de Laplace

Mètode: descomposició en fraccions simples per tal d'obtenir directament la TL^{-1} a partir de la taula anterior.

a) Arrels simples:

$$F(s) = \dots + \frac{K_i}{s - \alpha} + \dots \quad \text{on } K_i = F(s)(s - \alpha) \Big|_{s=\alpha}$$

b) Arrels múltiples ($r = \text{multiplicitat}$):

$$F(s) = \dots + \frac{K_{i1}}{(s - \alpha)^r} + \frac{K_{i2}}{(s - \alpha)^{r-1}} + \dots + \frac{K_{i(r-1)}}{(s - \alpha)^2} + \frac{K_{ir}}{(s - \alpha)} + \dots$$

$$\text{on } K_{in} = \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{ds} [F(s)(s - \alpha)^r] \Big|_{s=\alpha}$$

c) Arrels complexe-conjugades:

$$F(s) = \dots + \frac{N(s)}{(s - (\alpha + j\beta))(s - (\alpha - j\beta))} + \dots = \dots + \frac{K}{(s - (\alpha + j\beta))} + \frac{K^*}{(s - (\alpha - j\beta))} + \dots$$

en aquest cas K es troba igual que en el cas d'arrels simples.