

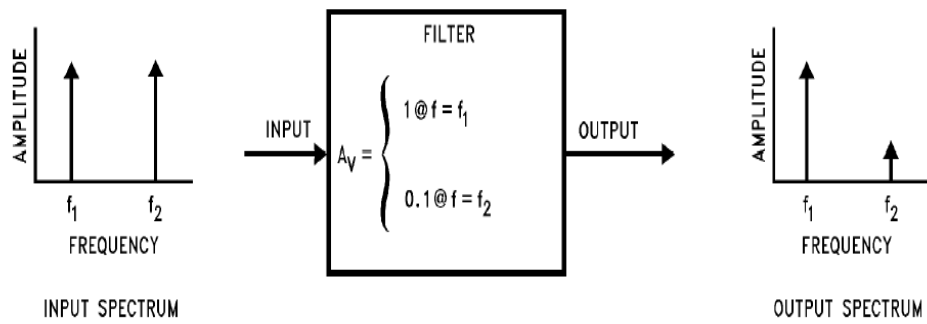
Tema : Filtres

Índex

- Introducció
- Filtres de primer ordre
 - Filtre passa baixa
 - Filtre passa alta
- Filtres de segon ordre
 - Passa baixa
 - Passa alta
 - Passa banda
 - Para banda
- Filtres de Butterworth

Filtres: Introducció

Filtre: circuit elèctric/electrònic que altera l'amplitud i/o fase d'un senyal d'entrada en funció de la seva freqüència.



Filtres : Introducció

Funció de Transferència



$$Z_C = \frac{1}{sC}$$



$$Z_L = sL$$

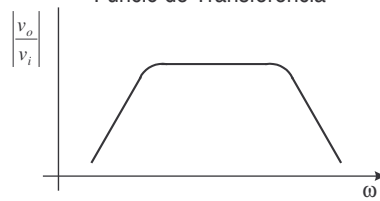


$$H(s) \equiv \frac{v_o(s)}{v_i(s)}$$

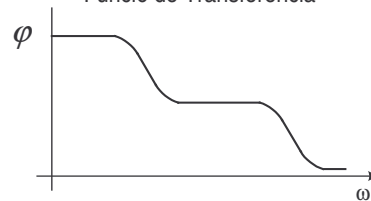
$$s \equiv j\omega$$



Mòdul de la
Funció de Transferència

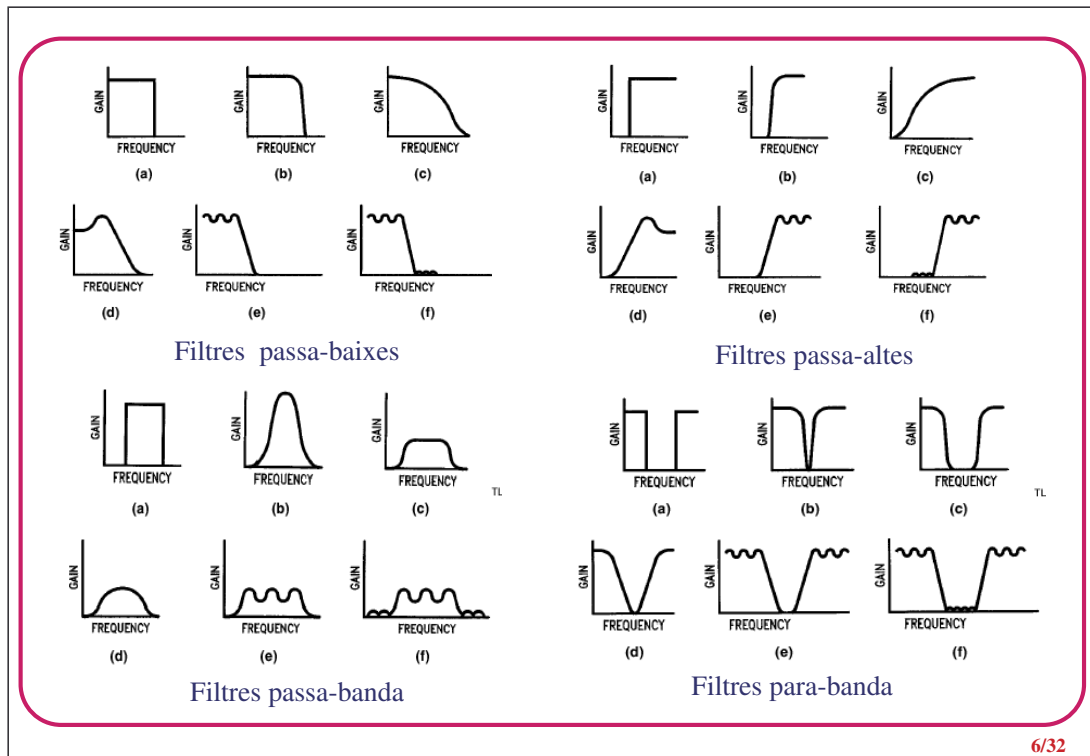


Fase de la
Funció de Transferència



Filtres: Introducció

- Un filtre s'empra per:
 - Amplificar senyals dins un cert rang de freqüències
 - Atenuar senyals dins un altre rang de freqüències
- TIPUS DE FILTRES
 - Depenent de la forma de la funció de transferència del filtre, això és, de com es comporta el circuit en front a la ω de l'entrada, classificam els filtres en
 - Passa baixes
 - Passa altes
 - Passa banda
 - Para banda
 - Passa tot
 - Depenent dels components utilitzats per implementar el filtre, distingim entre:
 - Filtres passius (R, L, C)
 - Filtres actius (R, L, C, transistors, Amp.Op.)



Filtres: Introducció

FILTRES ACTIUS vs. PASSIUS

Avantatges

- + Ajust del guany
- + Millora dels efectes de càrrega ($Z_{in} \uparrow$ $Z_{out} \downarrow$)
- + Cost (Amp.Op. Barats)
- + Flexibilitat per dissenyar la F.T. desitjada
- + Integrabilitat

Inconvenients

- Ample de banda finit dels elements actius
- No idealitats dels Amp.Op.
- Necessitat d'alimentació
- Distorsió dels elements actius
- Renou

Filtres: Introducció

ORDRE D'UN FILTRE

La funció de transferència d'un filtre

$$H(s) \equiv \frac{v_o(s)}{v_i(s)}$$

es pot expressar en forma general com

$$H(s) \equiv \frac{a_m s^m + \dots + a_1 s + a_0}{b_n s^n + \dots + b_1 s + b_0} \quad n \geq m$$

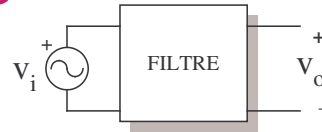
n : Ordre del filtre

$n = 1$ $\Rightarrow$ Filtres de 1^{er} ordre

$n = 2$ $\Rightarrow$ Filtres de 2^{on} ordre

Filtres passa-baixes, passa-altes i passa tot $\Rightarrow$ $n \geq 1$

Filtres passa-banda, para-banda $\Rightarrow$ $n \geq 2$



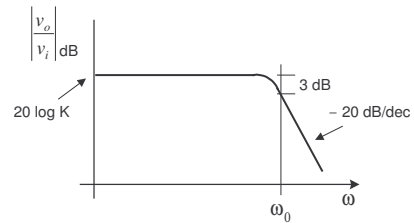
Filtres de 1^{er} ordre

FILTRE PASSA-BAIXES

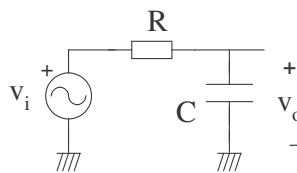
$$H(s) = \frac{K}{1 + \frac{s}{\omega_0}}$$

K : guany DC

ω_0 : pulsació de tall ($\omega_0 = 2\pi f_0$)

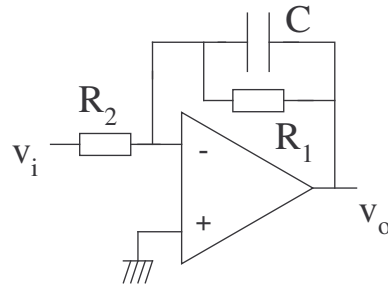


Exemple : Filtre passa-baixes de 1^{er} ordre passiu



Filtres de 1^{er} ordre

Exemple : Filtre passa-baixes de 1^{er} ordre actiu



Exemple numèric: Filtre passa baixes de 1^{er} ordre actiu
amb

$$R_2 = 1\text{k}\Omega, R_1 = 10\text{k}\Omega, C = 10\text{nF}$$

Filtres de 1^{er} ordre

Exemples d'aplicació :

1- Com atenuarà el filtre actiu un senyal d'entrada sinusoïdal d'amplitud 1 V i $f = 20\text{kHz}$?

2- Que li passarà a un senyal d'entrada d'amplitud 1V i $f = 100\text{ Hz}$?

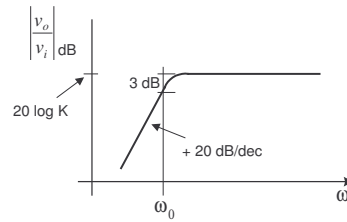
Filtres de 1^{er} ordre

FILTRE PASSA-ALTES

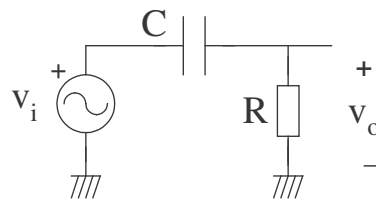
$$H(s) = \frac{sK}{s + \omega_0} = \frac{sK/\omega_0}{1 + \frac{s}{\omega_0}}$$

K : guany per $\omega \rightarrow \infty$

ω_0 : pulsació de tall ($\omega_0 = 2\pi f_0$)

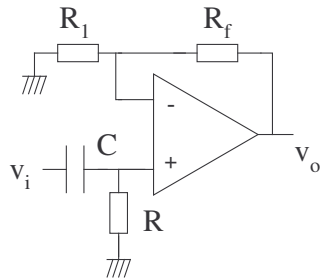


Exemple : Filtre passa-altes de 1^{er} ordre passiu



Filtres de 1^{er} ordre

Exemple : Filtre passa-altes de 1^{er} ordre actiu



Filtres de 2^{on} ordre: la funció biquadràtica

La forma general de la funció de transferència d'un filtre de 2^{on} ordre és

$$H = K \frac{k_2 s^2 + k_1 (\omega_o / Q) s + k_0 \omega_o^2}{s^2 + (\omega_o / Q) s + \omega_o^2}$$

a on $\left\{ \begin{array}{l} k_2 \ k_1 \ k_0 = \pm 1 \text{ o } 0 \\ \omega_o = \text{freqüència de resonància} \\ Q = \text{factor de qualitat} \end{array} \right.$

Filtres de 2^{on} ordre: la funció biquadràtica

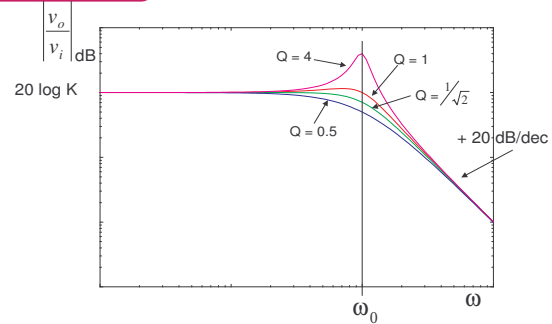
Filtre	k_2	k_1	k_0	Funció de transferència
Passa-baixes	0	0	1	$H = \frac{K\omega_o^2}{s^2 + (\omega_o/Q)s + \omega_o^2}$
Passa-altes	1	0	0	$H = \frac{Ks^2}{s^2 + (\omega_o/Q)s + \omega_o^2}$
Passa-banda	0	1	0	$H = \frac{K(\omega_o/Q)s}{s^2 + (\omega_o/Q)s + \omega_o^2}$
Para-banda	1	0	1	$H = \frac{K(s^2 + \omega_o^2)}{s^2 + (\omega_o/Q)s + \omega_o^2}$
Passa-tot	1	-1	1	$H = K \frac{s^2 - (\omega_o/Q)s + \omega_o^2}{s^2 + (\omega_o/Q)s + \omega_o^2}$

Filtres de 2^{on} ordre

FILTRE PASSA-BAIXES

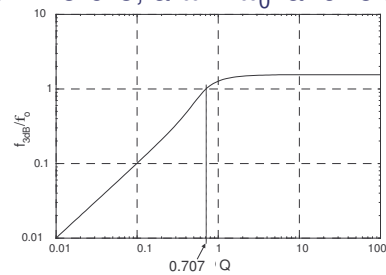
$$H = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + (\omega_0/Q)s + \omega_0^2}$$

$$K : \text{guany en DC} \quad |H(j\omega_0)| = KQ$$



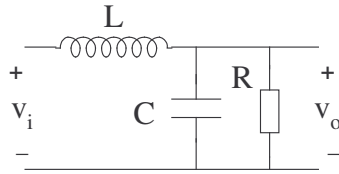
Al contrari del que teníem per un filtre de 1^{er} ordre, a $\omega = \omega_0$ la funció de transferència no cau sempre 3 dB.

$$f_{-3dB} = \omega_0 / 2\pi \Leftrightarrow Q = 1/\sqrt{2}$$



Filtres de 2^{on} ordre

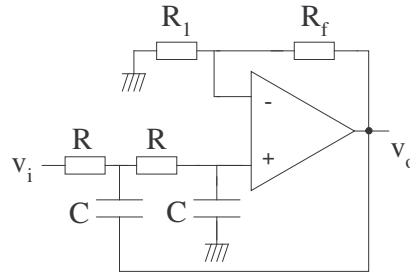
Exemple de filtre passa-baixes de 2^{on} ordre passiu



Aplicació numèrica: Dissenyar un filtre de 2on ordre passiu amb una $f_{-3dB} = 1\text{kHz}$

Filtres de 2^{on} ordre

Exemple de filtre passa-baixes de 2^{on} ordre actiu: Filtre **Sallen-Key** passa baixes



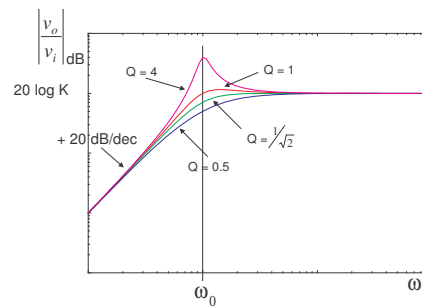
Filtres de 2^{on} ordre

FILTRE PASSA-ALTES

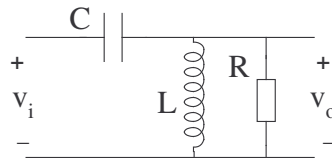
$$H = \frac{Ks^2}{s^2 + (\omega_0 / Q)s + \omega_0^2}$$

$$K : \text{guany per } \omega \rightarrow \infty \quad |H(j\omega_0)| = KQ$$

$$f_{-3dB} = \omega_0 / 2\pi \Leftrightarrow Q = 1/\sqrt{2}$$



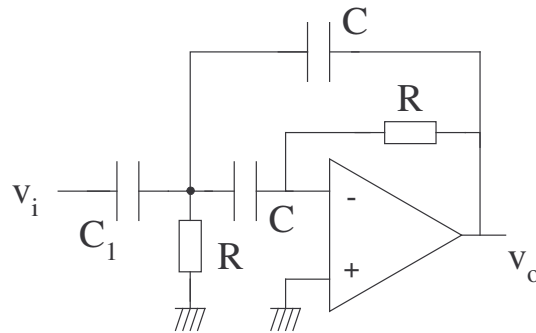
Exemple de filtre passa-altes de 2^{on} ordre passiu



Filtres de 2^{on} ordre

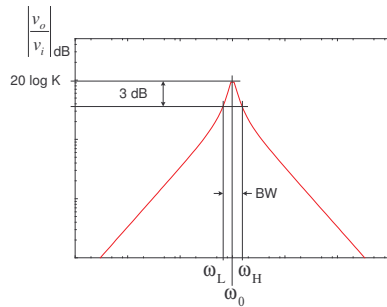
Exemple de filtre passa-altes de 2^{on} ordre actiu.

Podríem emprar el filtre **Sallen-Key** passa baixes, intercanviant les R per C. Alternativament utilitzarem un **filtre de realimentació múltiple** (*MFB filter*).

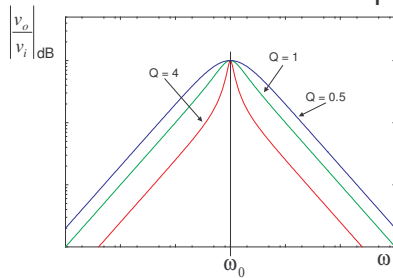


Filtres de 2^{on} ordre

FILTRE PASSA-BANDA



$Q \uparrow \Rightarrow BW \downarrow$



$$H = \frac{K(\omega_0/Q)s}{s^2 + (\omega_0/Q)s + \omega_0^2}$$

K : guany per $\omega = \omega_0$

ω_0 : pulsació o freq. Angular central

$$Q = \frac{\omega_0}{\omega_H - \omega_L} \equiv \frac{\omega_0}{2\pi BW} = \frac{f_0}{BW}$$

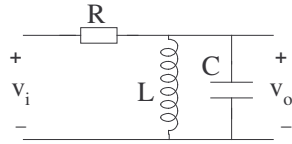
$$\omega_0 = \sqrt{\omega_H \cdot \omega_L}$$

Per exemple, suposem $\omega_0 = 10^4$ rad/s, $f_0 = 1529$ Hz

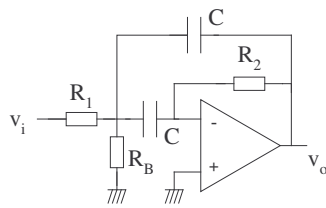
Q	BW
1	1529 Hz
5	318 Hz
10	159 Hz

Filtres de 2^{on} ordre

Exemple de filtre passa-banda de 2^{on} ordre passiu

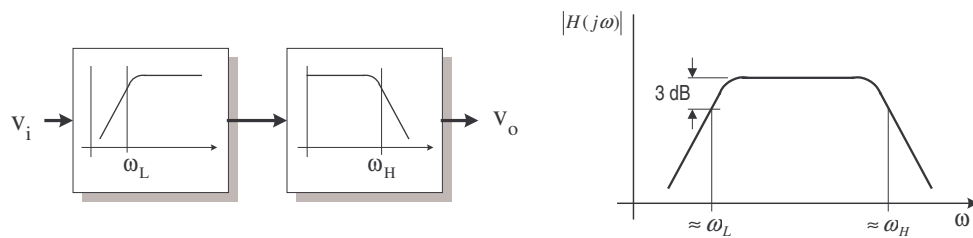


Exemple de filtre passa-banda de 2^{on} ordre actiu



Filtres de 2^{on} ordre

A vegades interessa un filtre passa banda que presenti un guany pràcticament pla a un rang ampli de freqüències. Per fer això, una solució es concatenar un filtre passa-altes seguit d'un filtre passa baixes (o viceversa).

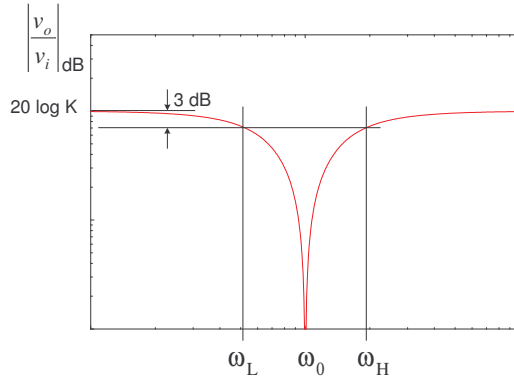


Si $\omega_L - \omega_H$ és prou gran, llavors ω_L i ω_H seran molt aprox. les freqüències (pulsacions) a -3dB del filtre passa banda

Filtres de 2^{on} ordre

FILTRE PARA-BANDA (o NOTCH filter)

$$H = \frac{K(s^2 + \omega_0^2)}{s^2 + (\omega_0 / Q)s + \omega_0^2}$$



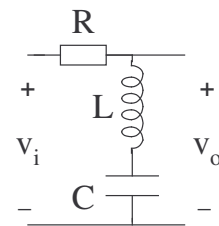
K : guany DC i per $\omega \rightarrow \infty$

ω_0 : pulsació o freq. Angular central

$$Q = \frac{\omega_0}{\omega_H - \omega_L} = \frac{f_0}{BW}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_H \cdot \omega_L}$$

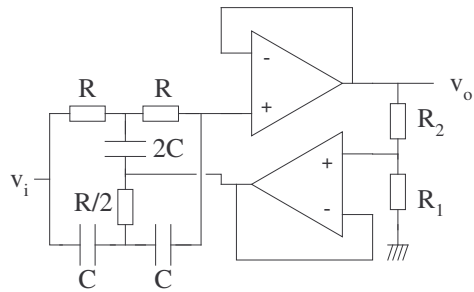
Exemple



$Q \uparrow \Rightarrow BW \downarrow$ Més selectiu és el filtre

Filtres de 2^{on} ordre

Exemple : Filtre para-banda de 2^{on} ordre actiu



Filtres de Butterworth

- L'objectiu quan es dissenya un filtre es que la seva funció de transferència compleixi unes certes especificacions. Per exemple, un filtre passa baixa amb $f_{-3dB} = 10$ kHz, atenuació de 60 dB per $f = 100$ kHz i guany DC igual a 2.
- A vegades, per complir les especificacions, cal emprar un filtre amb ordre $n > 2$. La idea es obtenir un filtre d'ordre n a base de connectar en cascada $n/2$ filtres d'ordre 2, si n és parell, o $(n-1)/2$ filtres d'ordre 2 i 1 d'ordre 1, si n és imparell.
- Els **filtres de Butterworth** tenen unes característiques que faciliten la imposició d'especificacions en la seva funció de transferència. En particular, i amb ajut de taules, és fàcil dissenyar filtres de Butterworth d'ordre n a partir de filtres d'ordre 2 i ordre 1.

Filtres de Butterworth

- Els filtres de Butterworth passa-baixa presenten una funció de transferència tal que

$$|H_n(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_o)^{2n}}} \quad \text{on } n : \text{ordre del filtre}$$

- Propietats:

- $|H_n(j\omega_o)| = \frac{K}{\sqrt{2}} \quad \forall n$ (mateixa f_{-3dB} per tot n)
- Pendent de $-20 \times n$ dB/dec per $\omega \gg \omega_o$
- $d|H_m|/d\omega|_{\omega=0} = 0$ per $m = 1, \dots, n-1$, això és, resposta màximament plana per $\omega = 0$

Filtres de Butterworth

- En el cas dels passa-alta presenten una funció de transferència tal que

$$|H_n(j\omega)| = \frac{K(\omega/\omega_o)^n}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_o)^{2n}}} \quad \text{on } n : \text{ordre del filtre}$$

- Propietats:

- $|H_n(j\omega_o)| = \frac{K}{\sqrt{2}} \quad \forall n$ (mateixa f_{-3dB} per tot n)
- Pendent de $-20 \times n$ dB/dec per $\omega \ll \omega_o$
- $d|H_m|/d\omega|_{\omega \rightarrow \infty} = 0$ per $m = 1, \dots, n-1$, això és, resposta màximament plana per $\omega \rightarrow \infty$

Filtres de Butterworth

TABLE 1(a). Butterworth Polynomials

Denominator coefficients for polynomials of the form $s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \dots + a_1s + a_0$.

n	a ₀	a ₁	a ₂	a ₃	a ₄	a ₅	a ₆	a ₇	a ₈	a ₉
1	1									
2	1	1.414								
3	1	2.000	2.000							
4	1	2.613	3.414	2.613						
5	1	3.236	5.236	5.236	3.236					
6	1	3.864	7.464	9.142	7.464	3.864				
7	1	4.494	10.098	14.592	14.592	10.098	4.494			
8	1	5.126	13.137	21.846	25.688	21.846	13.137	5.126		
9	1	5.759	16.582	31.163	41.986	41.986	31.163	16.582	5.759	
10	1	6.392	20.432	42.802	64.882	74.233	64.882	42.802	20.432	6.392

TABLE 1(b). Butterworth Quadratic Factors

n	
1	(s + 1)
2	(s ² + 1.4142s + 1)
3	(s + 1)(s ² + s + 1)
4	(s ² + 0.7654s + 1)(s ² + 1.8478s + 1)
5	(s + 1)(s ² + 0.6180s + 1)(s ² + 1.6180s + 1)
6	(s ² + 0.5176s + 1)(s ² + 1.4142s + 1)(s ² + 1.9319)
7	(s + 1)(s ² + 0.4450s + 1)(s ² + 1.2470s + 1)(s ² + 1.8019s + 1)
8	(s ² + 0.3902s + 1)(s ² + 1.1111s + 1)(s ² + 1.6629s + 1)(s ² + 1.9616s + 1)
9	(s + 1)(s ² + 0.3473s + 1)(s ² + 1.0000s + 1)(s ² + 1.5321s + 1)(s ² + 1.8794s + 1)
10	(s ² + 0.3129s + 1)(s ² + 0.9080s + 1)(s ² + 1.4142s + 1)(s ² + 1.7820s + 1)(s ² + 1.9754s + 1)

Filtres de Butterworth

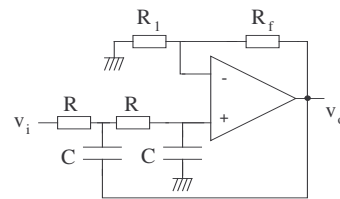
- Podem expressar la funció de transferència com

$$H(s) = \frac{K}{B_n(s)} \quad \text{Passa-baixa} \qquad H(s) = \frac{Ks^n}{B_n(s)} \quad \text{Passa-alta}$$

on $B_n(s)$: polinomi de Butterworth d'ordre n

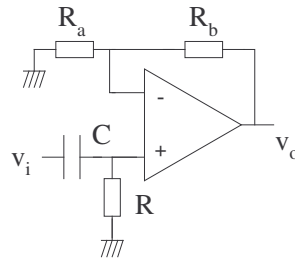
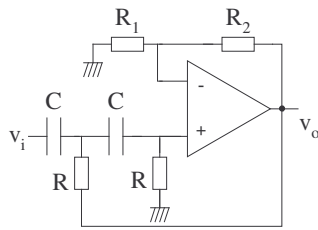
- Els polinomis de Butterworth es solen tabular per una **frequència de tall normalitzada** $\omega_0 = 1$ rad/s. Vegem amb un exemple com això no representa cap problema.

Exemple: Utilitzant un prototipus de filtre Sallen-key, donau valors als components per tal que sigui un filtre de Butterworth passa-baixa d'ordre 2 amb $f_0 = 10$ kHz

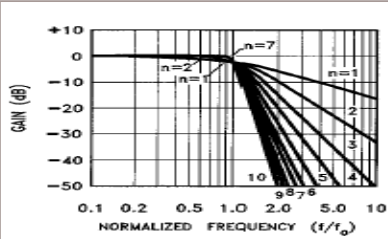


Filtres de Butterworth

- Exemple: Dissenyem un filtre passa-alta d'ordre 3, amb guany DC 3 i $f_{-3dB} = 1 \text{ kHz}$, partint dels prototipus següents

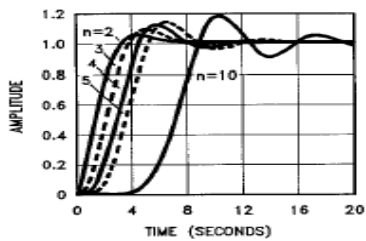


Filtres de Butterworth



Representació del mòdul de la funció de transferència dels filtres de Butterworth per $n = 1, \dots, 10$.

Per $\omega/\omega_0=1$, $|H(j\omega/\omega_0)| = -3 \text{ dB } \forall n$.



Resposta temporal d'un filtre de Butterworth de guany DC unitari a un esglaió d'amplitud unitari. Es mostra la resposta per a filtres amb $n=2, 3, 4, 5, 10$. Notem com un augment de n ens dona resposta en freqüència més ideal però resposta transitòria amb més arrissat.