

Tema I
Introducció: Mesures i Errors

Contingut

- Introducció
- Mesura i errors
 - Tipus d'errors
 - Mesures indirectes : Propagació d'errors
- Aproximació de corbes a punts experimentals
 - Regressió lineal
 - Cas general
 - Casos particulars : exponencials i logaritmes
- Sistemes de mesura. Corba de transferència estàtica

Introducció

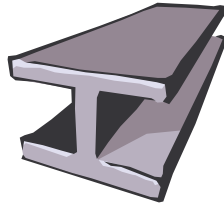
- Instrumentació :
 - ciència que estudia medis i mètodes per obtenir i analitzar informació sobre magnituds físiques o químiques.
- Instrumentació electrònica :
 - es basa en principis electrònics
 - mesura de magnituds electròniques (V, I, Z)
 - mesura d'altres magnituds però basant-se en electròniques
 - (ús de transductors)
 - analògics
 - digitals
 - mesures per comparació i mesures per deflexió

Mesura: definició

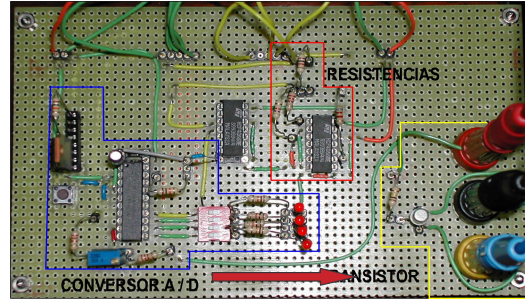
- Procés pel qual s'assigna un valor numèric a la qualitat desitjada



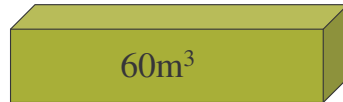
45°C



500 kg



12 mA

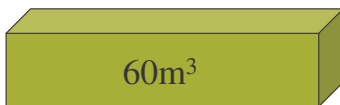


60m³

Mesura: característiques



45°C

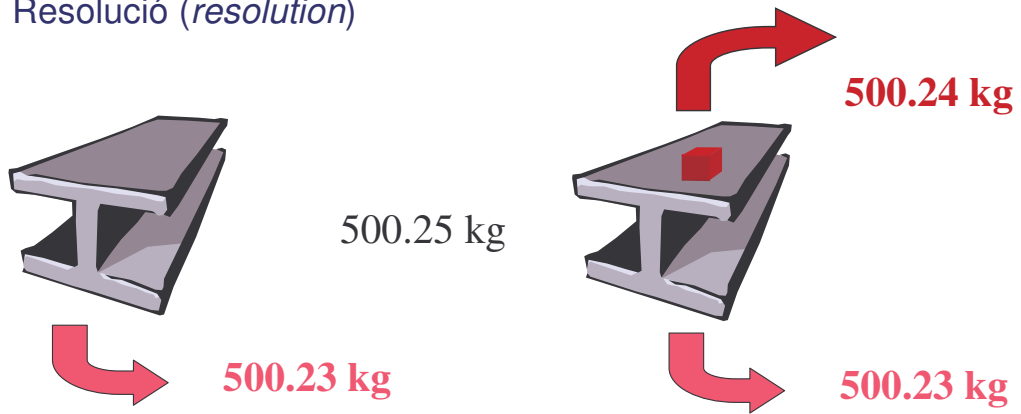


60m³

- Mesures directes i indirectes
 - Termòmetre → Temperatura
 - Cinta mètrica
 - Alçada (h)
 - Amplària (l)
 - Fondària (w)
 - Volum = producte (h,l,w)

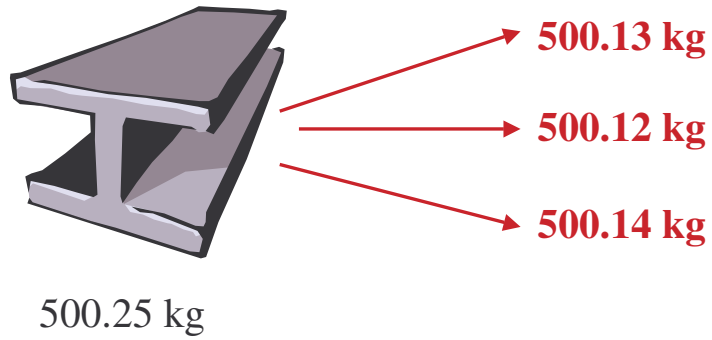
Mesura : característiques

- Precisió o exactitud (*accuracy*)
- Resolució (*resolution*)



Mesura : caractéristiques

- Repetibilitat (*precision*)



Mesura: electrònica

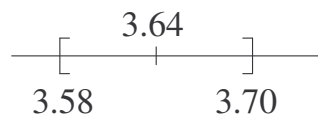
- Magnituds a mesurar :
 - Tensió (Volts)
 - Intensitat o Corrent (Ampers)
- També :
 - Impedàncies (Ohms),
 - Potència (Wats),
 - Energia (Joules, kW hora)
 - Freqüència (Hz, kHz, MHz, GHz)
 - Desplaçaments (m)
 - Característiques temporals
 - retards
 - temps de pujada o baixada

Errors : concepte

- Errors

- Desviació entre mesura i magnitud real
- Son inevitables!
- Objectiu :conèixer el seu valor i intentar minimitzar-los
- Error absolut (ϵ) i error relatiu (ϵ_r)

3.64 ± 0.06 1.7%



Millora del
mètode de
mesura

Tipus d'Errors

– Aberrants :

- poc freqüents, són grans, i normalment evitables (no els considerarem)

– Sistemàtics als instruments

- si es repeteixen les mesures, en les mateixes condicions, l'error és constant o varia amb una llei coneguda
- comparació amb un patró ➡ calibració
- aditius (no depenen de la magnitud mesurada)
- multiplicatius (depenen del valor de la magnitud mesurada)

– D'imprecisió

- aparell de mesura + observador
- sempre limitat per la precisió de l'aparell
 - un rellotge amb minutera en front d'un cronòmetre
 - un observador mirant l'arribada d'una cursa vs. sensors de presència

Tipus d'Errors

- **Aleatoris o estadístics**

- Augmentar n^º mesures pot implicar disminuir error
- Dispersió de mesures
- Càlculs estadístics : basats en intervals de confiança
 - Es calcula de la següent manera: t_p (constant de Student)

$$\mathcal{E}_{est}(x) = t_p \frac{s}{\sqrt{N}} \quad s = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \quad \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}$$
$$x = \bar{x} \pm \mathcal{E}_{est}$$

Tipus d'errors: exemple

- Exemple : Hem fet 20 mesures de temperatura obtenint

– 17.21 17.23 17.15 17.12 17.22 17.29 17.29 17.23 17.25
 17.12 17.20 17.21 17.23 17.24 17.25 17.20 17.22 17.22
 17.23 17.22

- Calculem l'error estadístic amb probabilitat del 99%, del 90 % i del 75 % de trobar el valor real dins l'interval de confiança

- calculem el promig, la desviació estàndar, i l'interval de confiança

$$\bar{x} = 17.2125 \quad s = 9.029 \cdot 10^{-3}$$

- I així: $\epsilon_{99} = 2.53 \cdot \frac{s}{\sqrt{N}} = 0.0228$ $\epsilon_{90} = 1.33 \cdot \frac{s}{\sqrt{N}} = 0.0119$ $\epsilon_{60} = 0.257 \cdot \frac{s}{\sqrt{N}} = 0.00623$

n	75%	90%	95%	99%	99.5%
1	1.00	3.08	6.31	31.82	63.66
2	0.82	1.89	2.92	6.97	9.93
3	0.77	1.64	2.35	4.54	5.84
10	0.70	1.37	1.81	2.76	3.17
20	0.69	1.33	1.73	2.53	2.85
40	0.68	1.30	1.68	2.42	2.70
80	0.68	1.29	1.66	2.37	2.64
100	0.68	1.29	1.66	2.36	2.63
∞	0.67	1.28	1.65	2.33	2.58

$$\bar{x} = \begin{cases} 17.21 \pm 0.02 & (0.12\%) \\ 17.21 \pm 0.01 & (0.06\%) \\ 17.212 \pm 0.006 & (0.035\%) \end{cases}$$

Mesures indirectes: propagació d'errors

- Objectiu :

- mesuram directament x_i i determinam el valor de F per una relació coneguda.

$$F = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

- Sigui $\varepsilon(x_i)$ $i=1, \dots, n$ l'error en la mesura de cada variable x_i . L'error de F ve donat per :

$$\varepsilon(F) = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \varepsilon(x_i)$$

- l'error $\varepsilon(x_i)$ tindrà dues contribucions depenent del tipus i nombre de mesures que es faci :

- imprecisió
- aleatori

Exemples

- Volem determinar V_m a partir de mesurar un espai (S) i un temps (t).

- La relació és $V_m = \frac{S}{t}$

- mesuram

$$S = 300\text{m} \quad t = 27.2\text{s} \quad \longrightarrow \quad V_m = \frac{300}{27.2} = 11.029 \text{ m/s}$$

- l'error a la mesura és

$$\varepsilon(s) = 1\text{cm} \quad \varepsilon(t) = 0.5\text{s}$$

- Llavors l'error a la V_m vendrà donat com

$$\varepsilon(V_m) = \left| \frac{\partial V_m}{\partial s} \right| \varepsilon(s) + \left| \frac{\partial V_m}{\partial t} \right| \varepsilon(t) = \frac{1}{t} \varepsilon(s) + \frac{s}{t^2} \varepsilon(t) \quad \longrightarrow \quad \varepsilon(v_m) = 0.203 \text{ m/s}$$

$\swarrow$
 $3.68 \cdot 10^{-4}$

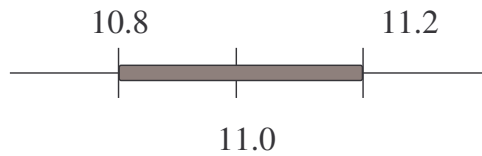
$\searrow$
 $2.03 \cdot 10^{-1}$

Exemples

- I per tant

$$V_m = 11.0 \pm 0.2 \text{ m/s} \longleftrightarrow V_m = 11.0 \pm 1.8\% \text{ m/s}$$

error relatiu



- Conclusions : domina l'error de t
- Qüestió : Si volem disminuir l'error que podem fer ???
- Problema : Volem un error només del 0.2%, determinau els errors màxims que es poden cometre en la mesura.

Exercicis

- 1) Suposau que volem determinar y , a través d'una mesura indirecta de s i t . La dependència de y en funció de s i t ve donada per:

$$y = 2s^2 + \frac{3}{t}$$

Si mesuram $s = 22.1 \pm 0.1$ $t = 15.4$

Calculeu l'error que ha de portar la mesura de t perquè la contribució d'aquest error sigui del mateix ordre que la contribució de l'error en la mesura de s .

- 2) Considereu la sèrie dels 3 primers valors de l'experiència estadística abans analitzada i calculeu l'error estadístic per varis valors de t_p .

Repetiu el problema amb els 10 primers valors i amb els 15. Treure conclusions dels resultats obtinguts.

Regresió Lineal

- Plantejament del problema :
 - Sabem que el comportament d'una magnitud en funció d'unes altres segueix una llei lineal
 - Ens interessa conèixer una magnitud que estigui relacionada per exemple amb el pendent.
- Objectiu : Obtenir l'expressió analítica de la recta.
- Solució : Regressió lineal



(també conegut com) Minimització de χ^2

$$y = ax + b$$

$$y^* = ax + b \quad \chi^2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^N (y_i - y_i^*)^2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^N (y_i - ax_i - b)^2$$

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial a} = 0 \Rightarrow \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^N 2(y_i - ax_i - b)(-x_i) = 0$$

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial b} = 0 \Rightarrow \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^N 2(y_i - ax_i - b)(-1) = 0$$

$$\sum_{i=1}^N -2y_i x_i + \sum_{i=1}^N 2ax_i^2 + \sum_{i=1}^N 2bx_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^N -2y_i + \sum_{i=1}^N 2ax_i + \sum_{i=1}^N 2b = 0$$

$$a \sum_{i=1}^N x_i^2 + b \sum_{i=1}^N x_i = \sum_{i=1}^N y_i x_i$$

$$a \sum_{i=1}^N x_i + bN = \sum_{i=1}^N y_i$$

$$a = \frac{\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^N y_i x_i & \sum_{i=1}^N x_i \\ \sum_{i=1}^N y_i & N \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^N x_i^2 & \sum_{i=1}^N x_i \\ \sum_{i=1}^N x_i & N \end{vmatrix}} = \frac{N \sum_{i=1}^N y_i x_i - \sum_{i=1}^N x_i \sum_{i=1}^N y_i}{N \sum_{i=1}^N x_i^2 - \sum_{i=1}^N x_i \sum_{i=1}^N x_i}$$

$$b = \frac{\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^N x_i^2 & \sum_{i=1}^N y_i x_i \\ \sum_{i=1}^N x_i & \sum_{i=1}^N y_i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^N x_i^2 & \sum_{i=1}^N x_i \\ \sum_{i=1}^N x_i & N \end{vmatrix}} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i^2 \sum_{i=1}^N y_i - \sum_{i=1}^N x_i \sum_{i=1}^N y_i x_i}{N \sum_{i=1}^N x_i^2 - \sum_{i=1}^N x_i \sum_{i=1}^N x_i}$$

Regresió Lineal

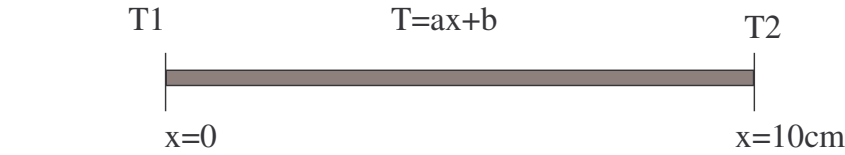
- Es defineix el factor de correlació r com :

$$r = \frac{N \sum_{i=1}^N x_i y_i - \sum_{i=1}^N x_i \sum_{i=1}^N y_i}{\sqrt{N \sum_{i=1}^N x_i^2 - \sum_{i=1}^N x_i \sum_{i=1}^N x_i} \sqrt{N \sum_{i=1}^N y_i^2 - \sum_{i=1}^N y_i \sum_{i=1}^N y_i}}$$

- r varia entre -1 i 1.
- Si r (valor absolut) pròxim a la unitat ➡ bona correlació
- Si r (valor absolut) menor que 0.5 ➡ mala correlació
- Derivació de l'expressió de r : (exercici per l'alumne)
 - 1) Calculam les expresions per $x=a'y+b'$. r ve donat pel producte $r = aa'$
 - 2) A partir de conceptes de variança i covariança

$$r = \frac{S_{xy}}{S_x S_y} \quad S_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N}} \quad S_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{N}$$

Exemple d'aplicació



$x(\text{cm})$	$T(^{\circ}\text{C})$
1	15.6
2	17.5
3	36.6
4	43.8
5	58.2
6	61.6
7	64.2
8	70.4
9	98.8

$$a = \frac{N \sum_{i=1}^N T_i x_i - \sum_{i=1}^N x_i \sum_{i=1}^N T_i}{N \sum_{i=1}^N x_i^2 - \sum_{i=1}^N x_i \sum_{i=1}^N x_i}$$
$$b = \frac{\sum_{i=1}^N T_i \sum_{i=1}^N x_i^2 - \sum_{i=1}^N T_i x_i \sum_{i=1}^N x_i}{N \sum_{i=1}^N x_i^2 - \sum_{i=1}^N x_i \sum_{i=1}^N x_i}$$

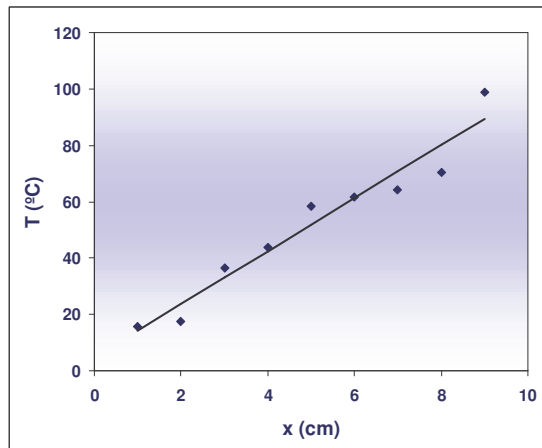
$$N = 9$$
$$\sum_{i=1}^N T_i = 466.7 \qquad \sum_{i=1}^N T_i x_i = 2898$$
$$\sum_{i=1}^N x_i = 45 \qquad \sum_{i=1}^N x_i^2 = 285$$

$$a=9.4\text{ }^{\circ}\text{C}/\text{cm}$$

$$b=4.8\text{ }^{\circ}\text{C}$$



$$T = 9.4 x + 4.8$$



$$r = 0.971$$

Generalització a altres funcions

$$x_i, y_i \quad y_i^* = f_{a_1, a_2, \dots, a_m}(x_i)$$

$$\chi^2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^N (y_i - f_{a_1, a_2, \dots, a_m}(x_i))^2 \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial \chi^2}{\partial a_j} = 0$$

Tendrem m equacions amb m incògnites.

Pot ser difícil : equacions no lineals

Necessitat en molts de casos de càlcul numèric.

Exercicis :

- Obtenir expressions per una paràbola
- Ajustar una recta i una paràbola a la següent sèrie numèrica (x,y):
(2,28),(4,31),(6,29),(8,35),(10,40)

Generalització altres funcions

- Com calculam en el cas de corbes no lineals el coeficient de correlació ? (Notació general)

$$R^2 = 1 - \frac{S_e^2}{S_y^2}$$

$$S_e^2 = \frac{\sum_{i=1}^N e_i^2}{N} - \bar{e}^2 \quad \leftarrow \quad e_i = y_i^* - y_i$$
$$S_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^N y_i^2}{N} - \bar{y}^2$$

Casos particulars

- Exponencial

$$y = Ae^{Bx} \longrightarrow \ln y = \ln Ae^{Bx} = \ln A + \ln e^{Bx}$$
$$\ln y = \ln A + Bx$$

- Logaritme

$$y = A \ln(Bx)$$

$$e^y = (Bx)^A = B^A x^A$$

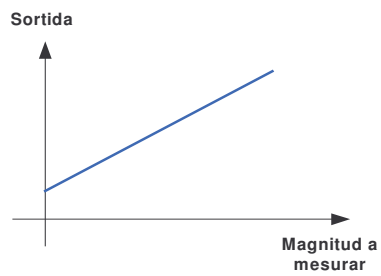
$$z = a_1 + a_2 x$$

Aproximació lineal

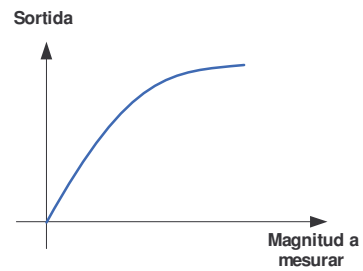
$$z = Kx^A$$

Aproximació de tipus potència.

Sistemes de mesura: Corba de transferència estàtica

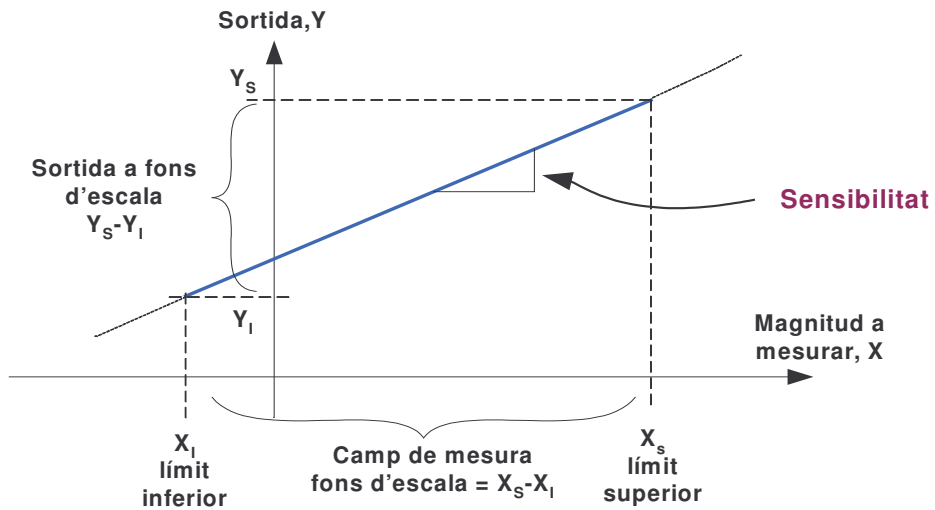


Lineal

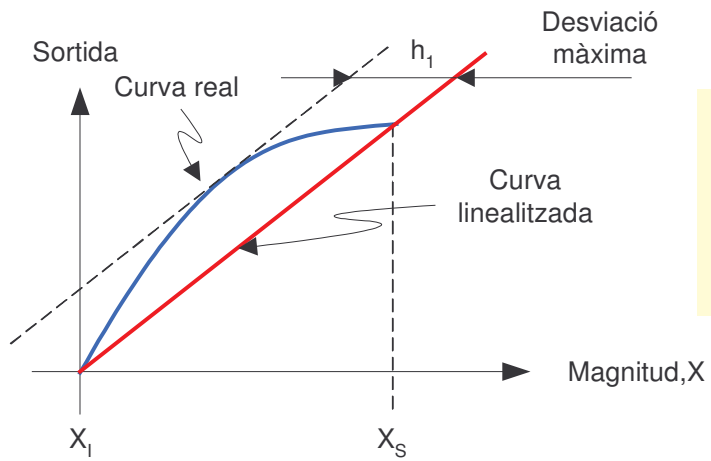


No lineal

Corba de transferència estàtica



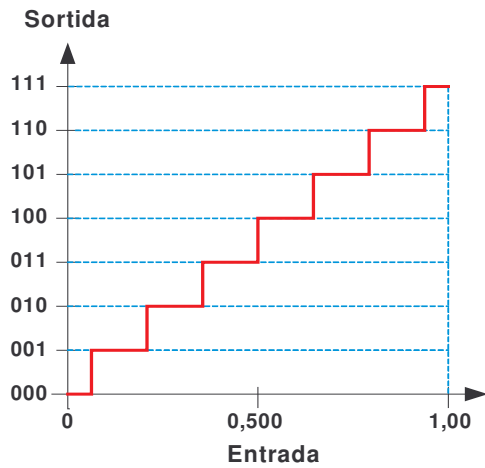
Corba de transferència estàtica



Linealitat

$$\frac{h_1}{X_s - X_I} 100\%$$

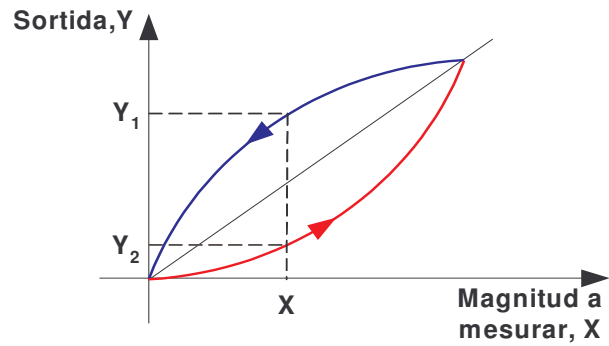
Corba de transferència estàtica



Resolució: mínim increment de l'entrada que produeix un canvi mesurable a la sortida

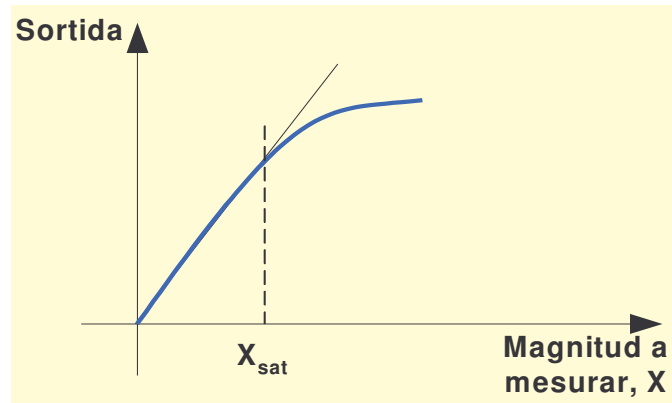
Corba de transferència estàtica

Corba de transferència estàtica amb histèresi



Corba de transferència estàtica

Corba de transferència estàtica amb saturació



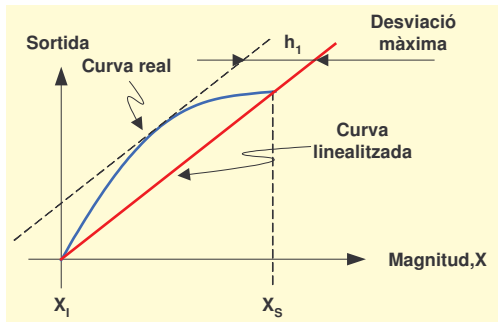
Exemple

Es disposa d'un sistema de mesura de presi3 del que s'han obtingut un conjunt de mesures. Es demana:

- (a) Linealitzar la corba de transfer3ncia est3tica emprant m3nims quadrats
- (b) Determinar l'error de linealitat expressat en % del fons d'escala

	Entrada, Presi33 en kPa										
	0,0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Sortida	0,005	0,098	0,224	0,300	0,405	0,520	0,602	0,715	0,799	0,902	0,999

Exemple



$$y = 0,00994 x + 0,00909$$

