

TEMA 9

RESPOSTA SINUSOÏDAL PERMANENT. MÈTODE DE FASORS: SISTEMES TRIFÀSICS

- Introducció: Estat estacionari sinusoidal
- Fasors
- Anàlisi de circuits mitjançant fasors
 - Impedàncies i transformació de senyals en fasors
 - Circuit transformat en règim permanent sinusoidal.
 - Exemples (Thévenin, Norton, Superposició, concepte de resonància,...)
- Potència en estat estacionari
- Sistemes trifàsics

Introducció: Estat estacionari sinusoidal

- Propietats rellevants de ones sinusoidals (repàs)
 - Suma de sinusoidals de la mateixa ω = sinusoidal de mateixa ω
 - Derivar o integrar n vegades una sinusoidal = sinusoidal
- Implicació
 - En un circuit lineal excitat amb una ona sinusoidal trobarem ones sinusoidals com a formes de tensions o corrents a qualsevol node o element del circuit



Introducció: Estat estacionari sinusoidal

- Suposem una entrada de tipus sinusoidal com entrada a un circuit lineal amb funció de transferència $H(s)$

$$X(t) = X_0 \cos(\omega t + \phi) = X_0 (\cos(\omega t) \cos(\phi) - \sin(\omega t) \sin(\phi))$$

$$X(s) = X_0 \left(\frac{s}{s^2 + \omega^2} \cos(\phi) - \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \sin(\phi) \right)$$

$$Y(s) = H(s) X_0 \left(\frac{s \cos(\phi) - \omega \sin(\phi)}{(s + j\omega)(s - j\omega)} \right) = \underbrace{\frac{K}{s - j\omega} + \frac{K^*}{s + j\omega}}_{\text{Pols forçats (entrada } X(s))} + \underbrace{\frac{K_1}{s - p_1} + \frac{K_2}{s - p_2} + \dots + \frac{K_n}{s - p_n}}_{\text{Pols naturals } H(s)}$$

$$Y(t) = K e^{j\omega t} + K^* e^{-j\omega t} + K_1 e^{p_1 t} + K_2 e^{p_2 t} + \dots + K_n e^{p_n t} \approx K e^{j\omega t} + K^* e^{-j\omega t}$$

Si el circuit és estable,
els pols de $H(s)$ tenen part real negativa
i per tant la resposta natural és fa 0 amb el temps
La resposta permanent només depèn de l'entrada



Introducció: Estat estacionari sinusoidal

- La resposta estacionària sinusoidal o permanent és la suma de dos termes conjugats

$$Y(t) = K e^{j\omega t} + K^* e^{-j\omega t} \Rightarrow Y(t) = (a + bj) + (a - bj) = 2a \quad Y(t) = \text{Re}\{2K e^{j\omega t}\}$$

$$2K = (s - j\omega) 2X_0 \left(\frac{s \cos(\phi) - \omega \sin(\phi)}{(s + j\omega)(s - j\omega)} \right) H(s) \Big|_{s=j\omega} = 2X_0 \frac{j\omega \cos(\phi) - \omega \sin(\phi)}{2j\omega} H(j\omega)$$

$$2K = X_0 (\cos(\phi) + j \sin(\phi)) H(j\omega) = X_0 e^{j\phi} |H(j\omega)| e^{j\phi_H} = X_0 |H(j\omega)| e^{j(\phi + \phi_H)}$$

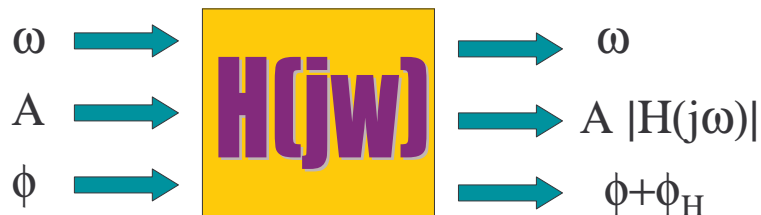
$$Y(t) = \text{Re}\{2K e^{j\omega t}\} = \text{Re}\{X_0 |H(j\omega)| e^{j(\phi + \phi_H)} e^{j\omega t}\}$$

$$Y(t) = X_0 |H(j\omega)| \cos(\omega t + \phi + \phi_H)$$

Introducció: Estat estacionari sinusoidal

- La resposta estacionària sinusoidal o permanent és una sinusoidal
 - de la mateixa freqüència que l'entrada,
 - amplitud multiplicada pel mòdul de la funció de transferència
 - i defassada la fase de la funció de transferència.

$$Y(t) = X_0 |H(j\omega)| \cos(\omega t + \phi + \phi_H)$$



- Exemple : Circuit RC

Fasors

- Fasor :
 - Representació vectorial d'ones sinusoidals de la mateixa freqüència.
 - Nombre complex que representa amplitud i fase d'una ona sinusoidal
 - Els fasors NO proporcionen informació de la freqüència de l'ona

$$\begin{aligned} V(t) &= A \cos(\omega t + \phi) \Rightarrow V = A e^{j\phi} = A \cos \phi + j A \sin \phi \\ V(t) &= a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) \Rightarrow V = c + j d \end{aligned}$$

$$\begin{cases} c = A \cos \phi \\ d = A \sin \phi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \sqrt{c^2 + d^2} \\ \phi = \arctg\left(\frac{d}{c}\right) \end{cases}$$

- La suma d'ones és equivalent a la suma de fasors
 - Les lleis de Kirchoff es poden aplicar a ones i a fasors

Exemples

Conclusió :

$$\begin{aligned} V(t) &= A \cos(\omega t + \phi) \Rightarrow V = A_{\phi} \\ V(t) &= a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) \Rightarrow V = a - j b \end{aligned}$$

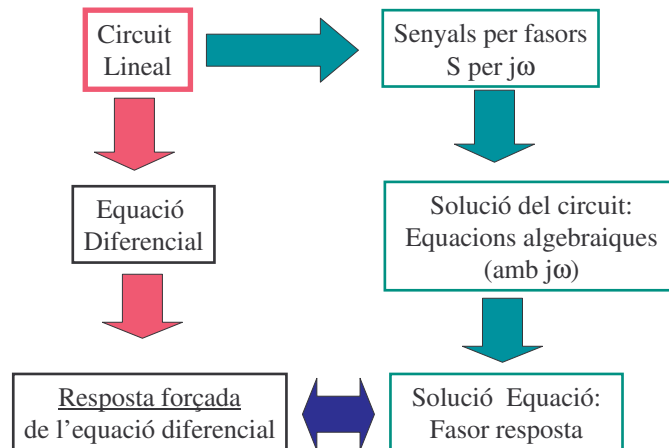
Anàlisi de circuits mitjançant fasors

- **Lleis de Kirchoff aplicables a fasors**
 - Llei de malles :
 - Suma de caigudes de tensió=0, tensions=sinusoidals, suma de sinusoidals de la mateixa freqüència equivalent a suma de fasors
 - Llei de nusos
 - Suma de corrents a un nus=0, corrents=sinusoidals, suma de sinusoidals de la mateixa freqüència equivalent a suma de fasors
- **Relacions I/V**
 - Equivalència (en el cas d'estudi d'ones sinusoidals) , considerant $s=j\omega$ (demostració)
 - PODEM DEFINIR IMPEDÀNCIES EN TERMES DE $j\omega$
 - Exemple

Comentaris

- **Estam en règim sinusoidal permanent**
 - No aplicable a ones no sinusoidals (evidentment)
 - No aplicable a influència de les condicions inicials
- **Fasor no té informació freqüencial**
 - Només feim l'anàlisi a una única freqüència
 - Implicacions en aplicació de superposició
- **Impedàncies NO són fasors**
 - No representen cap ona sinusoidal, només relacions I/V

Equivalència Eq. Diferencial- Fasors



Exemples d'aplicació

- Exemple
- Exemple : determinació d'equivalents Thévenin
- Exemple : determinació d'equivalents Norton
- Exemple: aplicació del principi de superposició
 - Si totes les fonts són de la mateixa freqüència, igual que abans
 - Si hi ha fonts de diferent freqüència
 - Atenció a canviar les impedàncies per cada font
 - Atenció no podem sumar fasors com a fasor solució, ja que no es poden sumar dos fasors que representen dues ones de distinta freqüència
- Exemple : concepte de resonància

Potència en estat estacionari

- A un element del circuit $v(t)$ i $i(t)$ sinusoidals desfassades

$$v(t) = V_0 \cos(\omega t + \phi_V) \quad i(t) = I_0 \cos(\omega t + \phi_I)$$

- Potència = producte tensió - corrent

$$p(t) = v(t)i(t) = V_0 I_0 \cos(\omega t + \phi_V) \cos(\omega t + \phi_I)$$

$$2 \cos(x) \cos(y) = \cos(x - y) + \cos(x + y)$$

$$p(t) = \frac{V_0 I_0}{2} \cos(\phi_V - \phi_I) + \frac{V_0 I_0}{2} \cos(2\omega t + \phi_V + \phi_I)$$

$$P_{\text{MED}} = \frac{V_0 I_0}{2} \cos(\phi_V - \phi_I)$$

$$P_{\text{MED}} = \frac{V_0 I_0}{2} \cos(\theta) \quad \text{amb} \quad \theta = \phi_V - \phi_I$$

Factor de potència

Potència en estat estacionari

- Relació potència amb impedància

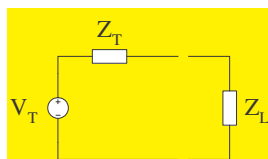
$$P_{\text{MED}} = \frac{V_0 I_0}{2} \frac{R}{|Z|}$$

$$P_{\text{MED}} = \frac{I_0^2 R}{2}$$

$$P_{\text{MED}} = I_{\text{EF}}^2 R$$

- Màxima transferència de potència

- Adaptació d'impedàncies : adaptació conjugada
- $R_T = R_L, \quad X_T = -X_L$

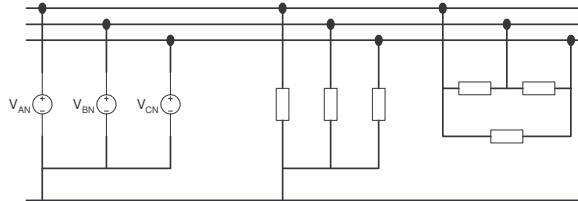


$$P_{\text{MED}} = \frac{1}{2} \frac{|V_T|^2 R_L}{(R_T + R_L)^2 + (X_T + X_L)^2}$$

Potència Trifàsica

- Esquema d'un sistema trifàsic

- 4 terminals, generador trifàsic en estrella, càrrega en estrella, càrrega en triangle.



- Generador trifàsic equilibrat

$$|V_{AN}| = |V_{BN}| = |V_{CN}| = V_F$$

$$V_{AN} + V_{BN} + V_{CN} = 0$$

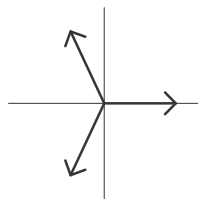
Seqüència positiva

$$V_{AN} = V_{F_0^\circ} \quad V_{BN} = V_{F_{-120^\circ}} \quad V_{CN} = V_{F_{-240^\circ}}$$

Seqüència negativa

$$V_{AN} = V_{F_0^\circ} \quad V_{BN} = V_{F_{-240^\circ}} \quad V_{CN} = V_{F_{-120^\circ}}$$

Potència trifàsica



Seqüència positiva

$$V_{AN} = V_{F_0^\circ} \quad V_{BN} = V_{F_{-120^\circ}} \quad V_{CN} = V_{F_{-240^\circ}}$$

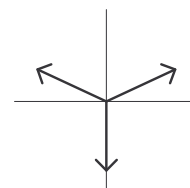
Seqüència negativa

$$V_{AN} = V_{F_0^\circ} \quad V_{BN} = V_{F_{-240^\circ}} \quad V_{CN} = V_{F_{-120^\circ}}$$

- Sentit gir motors trifàsics depèn de signe seqüència
- Conceptualment seq. Positiva i seq negativa equivalent, molt important a nivell pràctic
- Pas de tensions de fase a tensions de línia

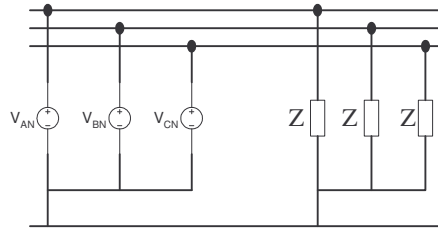
$$V_{AB} = \sqrt{3}V_{F_{30^\circ}} \quad V_{BC} = \sqrt{3}V_{F_{-90^\circ}} \quad V_{CA} = \sqrt{3}V_{F_{-210^\circ}}$$

$$\text{amplitud tensió línia} = \sqrt{3} \text{ amplitud tensió fase}$$



Potència Trifàsica

- Exemple 1. Impedàncies en estrella iguals , equilibrades.



- Exemple 2. Impedàncies en triangle iguals, equilibrades.

