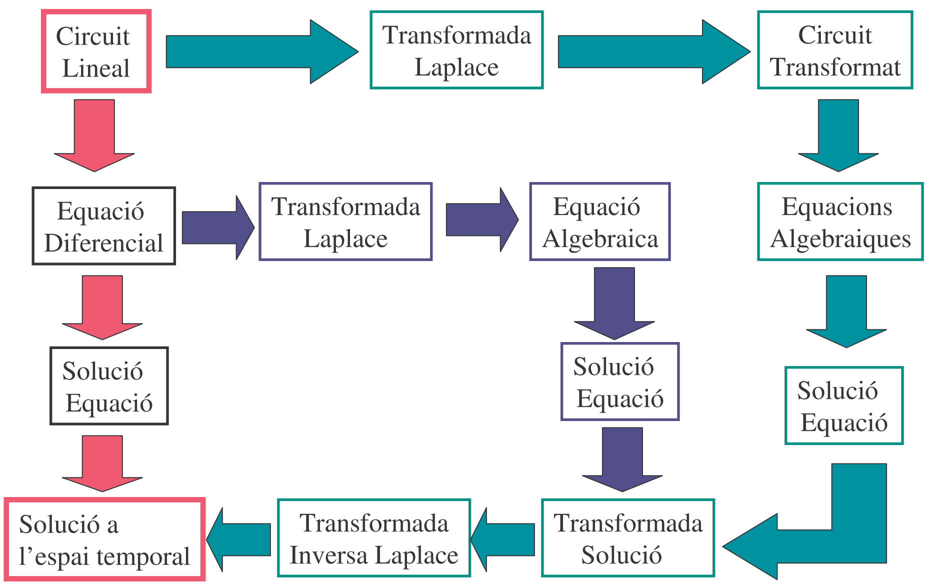
TEMA 7
LA TRANSFORMADA DE LAPLACE.
APLICACIÓ: RESOLUCIÓ RESPOSTA TRANSITÒRIA

- Introducció: Presentació del problema
- Definició de transformada
- Propietats principals
- Taula de transformades
- Diagrames de pols i zeros
- Transformació inversa de Laplace
- Aplicació: resolució de la resposta transitòria a partir de transformació d'equació diferencial de comportament

Presentació del Problema



Definició de Transformada de Laplace

- Definició de transformada de Laplace

$$L(V(t)) = V(s) = \int_{0^-}^{\infty} V(t) e^{-st}\, dt$$

  - S és freqüència complexa

$$s = \sigma + j\omega$$

  - La integral convergeix si V(t) és continua a trams de 0 a infinit, i és d'ordre exponencial

$$\exists K \text{ i } b \quad \text{t.q.} \left|V(t)\right| < Ke^{bt} \;\; \forall t > T(\text{cert}T)$$

  - V(t) = 0 per tot t<0
    - Exigim unicitat a la transformació

Definició de Transformada de Laplace

- Exemple: transformada de u(t) ?

$$L(V(t)) = V(s) = \int_{0^-}^{\infty} u(t) e^{-st}\, dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} = 0 - \left(-\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{s}$$

Propietats Principals

- Linealitat

$$L\left(AV_1(t)+BV_2(t)\right)=AL\left(V_1(t)\right)+BL\left(V_2(t)\right)$$

- Integral

$$L\left(\int_0^t V(t)dt\right)=\frac{V(s)}{s}$$

- Derivada

$$L\left(\frac{dV}{dt}\right)=sV(s)-V(0^-)$$

$$L\left(\frac{d^2V}{dt^2}\right)=s^2V(s)-sV(0^-)-V'(0^-)$$

$$L\left(\frac{d^3V}{dt^3}\right)=s^3V(s)-s^2V(0^-)-sV'(0^-)-V''(0^-)$$

Principals transformades

Impuls	$\delta(t)$	1
Esglaó	$u(t)$	$1/s$
Rampa	$r(t)=tu(t)$	$1/s^2$
Exponencial	e^{-at}	$1/(s+a)$
Rampa esmorteïda	te^{-at}	$1/(s+a)^2$
Sinusoidal I	$\cos(\beta t)$	$s/(s^2+\beta^2)$
Sinusoidal II	$\sin(\beta t)$	$\beta/(s^2+\beta^2)$
Sinus. esmorteïda I	$e^{-at}\cos(\beta t)$	$(s+\alpha)/((s+\alpha)^2+\beta^2)$
Sinus. esmorteïda II	$e^{-at}\sin(\beta t)$	$\beta/((s+\alpha)^2+\beta^2)$

Diagrames de pols i zeros

- Transformada de Laplace = funció racional de s

$$V(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

$$V(s) = K \frac{(s - z_1)(s - z_2)\cdots(s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2)\cdots(s - p_n)}$$

  – Pols : valors que anul·len el denominador p_i
  – Zeros: valors que anul·len el numerador z_i
  – Pols i zeros en general nombres complexes
    - Representació en un diagrama bidimensional
    - Exemple : sinusoïdal esmorteïda ?
    - A partir del diagrames de pols i zeros és possible identificar la funció !!

Transformada inversa de Laplace

- Antitransformar

$$L(V(t)) = V(s) \Rightarrow L^{-1}(V(s)) = u(t)V(t)$$

  – Exemples : ona sinusoïdal i ona exponencial

$$V(s) = L(\sin(\beta t)) = \frac{\beta}{s^2 + \beta^2}$$

$$V(t) = L^{-1}\left(\frac{\beta}{s^2 + \beta^2}\right) = u(t)\sin(\beta t)$$

$$V(s) = \frac{10}{s + 2} \Rightarrow V(t) = 10u(t)e^{-2t}$$

Transformada inversa de Laplace

- Antitransformar
  - En general

$$V(s)=\frac{r(s)}{q(s)}=K\frac{(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$$

  - Si no hi ha pols repetits, i hi ha més pols que zeros : (K_i residus)

$$V(s)=\frac{K_1}{s-p_1}+\frac{K_2}{s-p_2}+\cdots+\frac{K_n}{s-p_n}$$

  - Antitransformant

$$V(t)=u(t)\left(K_1e^{p_1t}+K_2e^{p_2t}+\cdots+K_ne^{p_nt}\right)$$

  - Problema : càlcul de residus
  - Exemple: cas amb 1 zero i 3 pols ?

Exemple

- Cas amb un zero i 3 pols

$$V(s)=\frac{K(s-z_1)}{(s-p_1)(s-p_2)(s-p_3)}$$

$$V(s)=\frac{K(s-z_1)}{(s-p_1)(s-p_2)(s-p_3)}=\frac{K_1}{s-p_1}+\frac{K_2}{s-p_2}+\frac{K_3}{s-p_3}$$

$$(s-p_1)V(s)=K_1+\frac{K_2(s-p_1)}{s-p_2}+\frac{K_3(s-p_1)}{s-p_3}$$

$$amb \quad s=p_1 \quad resulta \quad K_1=(s-p_1)V(s)\Big|_{s=p_1}$$

- Per tant, fent el mateix amb p_2 i p_3 resulta

$$K_1=(s-p_1)V(s)\Big|_{s=p_1}$$

$$K_2=(s-p_2)V(s)\Big|_{s=p_2}$$

$$K_3=(s-p_3)V(s)\Big|_{s=p_3}$$

Exemple

- Cas amb un zero i 3 pols
  - Zero a s=-3
  - Pols a s=0, s=-1 i s=-2

$$V(s)=\frac{2(s+3)}{s(s+1)(s+2)}$$

$$V(s)=\frac{K_1}{s}+\frac{K_2}{s+1}+\frac{K_3}{s+2}$$

$$K_1=sV(s)\big|_{s=0}=s\frac{2(s+3)}{s(s+1)(s+2)}\bigg|_{s=0}=\frac{2(s+3)}{(s+1)(s+2)}\bigg|_{s=0}=\frac{2\cdot 3}{1\cdot 2}=3$$

$$K_2=(s+1)V(s)\big|_{s=-1}=(s+1)\frac{2(s+3)}{s(s+1)(s+2)}\bigg|_{s=-1}=\frac{2(s+3)}{s(s+2)}\bigg|_{s=-1}=\frac{2\cdot 2}{-1\cdot 1}=-4$$

$$K_3=(s+2)V(s)\big|_{s=-2}=(s+2)\frac{2(s+3)}{s(s+1)(s+2)}\bigg|_{s=-2}=\frac{2(s+3)}{s(s+1)}\bigg|_{s=-2}=\frac{2\cdot 1}{-2\cdot -1}=1$$

$$V(t)=3u(t)-4e^{-t}u(t)+e^{-2t}u(t)=u(t)\left(3-4e^{-t}+e^{-2t}\right)$$

Transformada inversa de Laplace

- Cas de pols complexes simples
  - Primera forma
  - Segona forma
- Cas de funcions impròpies n=m i n<m
- Cas de pols múltiples

Exemples d'aplicació

- Resposta a un esglaó d'un circuit de primer ordre
- Resposta a qualsevol entrada
  - Exemple : resposta sinusoidal

Cas pols complexes simples

- Suposem una funció amb un pol a s=α+jβ i al conjugat

$$V(s) = \cdots + \frac{K}{s-\alpha-j\beta} + \frac{K^*}{s-\alpha+j\beta} + \cdots \qquad K = |K|e^{j\theta} \quad i \quad K^* = |K|e^{-j\theta}$$

$$V(s) = \cdots + \frac{|K|e^{j\theta}}{s-\alpha-j\beta} + \frac{|K|e^{-j\theta}}{s-\alpha+j\beta} + \cdots$$

$$V(t) = \cdots + u(t)|K|e^{j\theta}e^{\alpha t}e^{j\beta t} + u(t)|K|e^{-j\theta}e^{\alpha t}e^{-j\beta t} + \cdots$$

$$V(t) = u(t)\left[\cdots + 2|K|e^{\alpha t}\,\frac{e^{j(\theta+\beta t)} + e^{-j(\theta+\beta t)}}{2} + \cdots\right]$$

$$V(t) = u(t)\left[\cdots + 2|K|e^{\alpha t}\cos(\beta t + \theta) + \cdots\right]$$

Cas pols complexes

$$V(s) = \frac{20(s+3)}{(s+1)(s^2+2s+5)}$$

- Zero a s=-3 i pols a s=-1, s=-1+2j i s=-1-2j

$$V(s) = \frac{K_1}{(s+1)} + \frac{K_2}{(s+1-2j)} + \frac{K_2^*}{(s+1+2j)}$$

$$K_1 = (s+1)V(s)\big|_{s=-1} = \left.\frac{20(s+3)}{s^2+2s+5}\right|_{s=-1} = \frac{20\cdot 2}{1-2+5} = 10$$

$$K_2 = (s+1-2j)V(s)\big|_{s=-1+2j} = \left.\frac{20(s+3)}{(s+1)(s+1+2j)}\right|_{s=-1+2j} = \frac{20(2+2j)}{(2j)(4j)} = \frac{40(1+j)}{-8} = -5-5j = 5\sqrt{2}e^{\frac{j5\pi}{4}}$$

- Per tant

$$Com \quad V(t) = u(t)\left[\cdots + 2|K|e^{\alpha t}\cos(\beta t+\theta) + \cdots\right]$$

$$ara \quad V(t) = u(t)\left[10e^{-t} + 10\sqrt{2}e^{-t}\cos\left(2t + \frac{5\pi}{4}\right)\right]$$

Cas pols complexes : 2ona opció

$$V(s)=\frac{20(s+3)}{(s+1)(s^2+2s+5)}$$

$$s^2+2s+5=(s+\alpha)^2+\beta^2$$

- $s^2+2s+5=(s+1)^2+2^2$

$$V(s)=\frac{K_1}{(s+1)}+\frac{K_2(s+1)}{(s+1)^2+2^2}+\frac{K_3 2}{(s+1)^2+2^2}=\frac{K_1\left((s+1)^2+2^2\right)+K_2(s+1)^2+K_3 2(s+1)}{(s+1)\left((s+1)^2+2^2\right)}$$

$$V(s)=\frac{(K_1+K_2)s^2+(2K_1+2K_2+2K_3)s+5K_1+K_2+2K_3}{(s+1)\left((s+1)^2+2^2\right)}$$

$$\left.\begin{array}{l} K_1+K_2=0 \\ 2K_1+2K_2+2K_3=20 \\ 5K_1+K_2+2K_3=60 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} K_1=10 \\ K_2=-10 \\ K_3=10 \end{array}\right.$$

Per tant

$$V(t)=u(t)\left[10e^{-t}-10e^{-t}\cos(2t)+10e^{-t}\sin(2t)\right]$$

I això hauria de ser equivalent (exercici) $V(t)=u(t)\left[10e^{-t}+10\sqrt{2}e^{-t}\cos\left(2t+\frac{5\pi}{4}\right)\right]$

Cas funcions impròpies i cas pols múltiples

- Si n=m, dividim i ens quedarà K+funció pròpia
  - K implicarà una delta i la part pròpia tal com hem fet fins ara
- Si n<m, dividim i ens apareixen termes amb s^a a=1,2, …
  - Funcions que no apareixeran a circuits reals
- CAS POLS MÚLTIPLES

$$V(s)=\frac{K(s-z_1)}{(s-p_1)(s-p_2)^2}=\frac{K_1}{s-p_1}+\frac{K_{21}}{s-p_2}+\frac{K_{22}}{(s-p_2)^2}$$

$$V(t)=u(t)\left[K_1e^{p_1t}+K_{21}e^{p_2t}+K_{22}te^{p_2t}\right]$$

$$K_1=(s-p_1)V(s)\Big|_{s=p_1}=\left.\frac{K(s-z_1)}{(s-p_2)^2}\right|_{s=p_1}$$

$$K_{22}=(s-p_2)^2V(s)\Big|_{s=p_2}=\left.\frac{K(s-z_1)}{(s-p_1)}\right|_{s=p_2}$$

Cas pols múltiples

- Anem a calcular K_{21}
  - Multiplicam per $(s-p_2)^2$ i llavors derivam i avaluam a $s=p_2$

$$(s-p_2)^2 V(s) = \frac{(s-p_2)^2 K_1}{s-p_1} + (s-p_2)K_{21} + K_{22}$$

$$\frac{d}{ds}\left[(s-p_2)^2 V(s)\right]_{s=p_2} = \left.\frac{2(s-p_2)K_1(s-p_1)-(s-p_2)^2 K_1}{(s-p_1)^2} + K_{21}\right|_{s=p_2} = K_{21}$$

  - Exemple numèric

$$V(s) = \frac{4(s+3)}{s(s+2)^2} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_{21}}{s+2} + \frac{K_{22}}{(s+2)^2}$$

$$K_1 = sV(s)\big|_{s=0} = \left.\frac{4(s+3)}{(s+2)^2}\right|_{s=0} = \frac{4\cdot 3}{4} = 3$$

$$K_{22} = (s+2)^2 V(s)\big|_{s=-2} = \left.\frac{4(s+3)}{s}\right|_{s=-2} = \frac{4\cdot 1}{-2} = -2$$

$$K_{21} = \frac{d}{ds}(s+2)^2 V(s)\big|_{s=-2} = \left.\frac{d}{ds}\frac{4(s+3)}{s}\right|_{s=-2} = \left.\frac{4s-4(s+3)}{s^2}\right|_{s=-2} = \frac{-12}{4} = -3$$

$Per \quad tant$

$$V(t) = 3u(t) - 3u(t)e^{-2t} - 2te^{-2t}u(t) = u(t)\left[3 - 3e^{-2t} - 2te^{-2t}\right]$$

Resposta a l'esglaó de circuits de 1er ordre

- L'equació resposta d'un circuit RC per exemple hem vist que és:

$$RC\frac{dV_c}{dt} + V_c = Au(t) \quad amb \quad V_c(0) = V_0$$

- Si transformam

$$L\left[RC\frac{dV_c(t)}{dt} + V_c(t)\right] = L[Au(t)]$$

$$RC\cdot L\left[\frac{dV_c(t)}{dt}\right] + L[V_c(t)] = A\cdot L[u(t)]$$

$$RC[sV_c(s) - V_c(0)] + V_c(s) = A\frac{1}{s}$$

:

$$(RCs+1)V_c(s) = \frac{A}{s} + RCV_0 \Rightarrow V_c(s) = \frac{A}{s(RCs+1)} + \frac{RCV_0}{(RCs+1)}$$

Resposta a l'esglaó de circuits de 1er ordre

- Ara factoritzant i antitransformant

$$V_c(s)=\frac{A/RC}{s\left(s+1/RC\right)}+\frac{V_0}{\left(s+1/RC\right)}$$

$$\frac{A/RC}{s\left(s+1/RC\right)}=\frac{K_1}{s}+\frac{K_2}{s+1/RC}\Rightarrow (exercici)\begin{cases}K_1=A\\K_2=-A\end{cases}$$

$$V_c(s)=\frac{A}{s}+\frac{-A}{s+1/RC}+\frac{V_0}{\left(s+1/RC\right)}\Rightarrow V_c(t)=u(t)\left[A-Ae^{-t/RC}+V_0e^{-t/RC}\right]$$

Resposta forçada

Condició inicial

Resposta estat nul

Resposta entrada nul.la

Resposta natural

Resposta a qualsevol entrada

- En un circuit RC, l'equació de comportament és

$$RC\frac{dV_c}{dt}+V_c=V_A(t)\quad amb\quad V_c(0)=V_0$$

- Fent un tractament igual al cas anterior (en lloc de A/s tendrem $V_A(s)$)

$$V_c(s)=\frac{V_A(s)/RC}{s+1/RC}+\frac{V_0}{s+1/RC}$$

- Al cas particular per exemple d'una ona senoidal $V_A(t)=A\cos(\omega t)$

$$V_c(s)=\frac{A\frac{s}{s^2+\omega^2}/RC}{s+1/RC}+\frac{V_0}{s+1/RC}=\frac{A}{RC}\frac{s}{\left(s^2+\omega^2\right)\left(s+1/RC\right)}+\frac{V_0}{s+1/RC}$$

Resposta a qualsevol entrada (cas ona senoidal)

- Ara resulta

$$V_c(s)=\frac{A}{RC}\frac{s}{\left(s^2+\omega^2\right)\left(s+\frac{1}{RC}\right)}+\frac{V_0}{s+\frac{1}{RC}}$$

$$\frac{s}{\left(s^2+\omega^2\right)\left(s+\frac{1}{RC}\right)}=\frac{K_1}{s+\frac{1}{RC}}+\frac{K_2}{s+j\omega}+\frac{K_2^*}{s-j\omega}$$

$$K_1=\left.\frac{s}{s^2+\omega^2}\right|_{s=-1/RC}=\cdots=\frac{-RC}{1+\omega^2R^2C^2}$$

$$K_2=\left.\frac{s}{\left(s+\frac{1}{RC}\right)\left(s-j\omega\right)}\right|_{s=-j\omega}=\cdots=\frac{jRC}{2j+2\omega RC}=\left|\frac{RC}{\sqrt{4+4\omega^2R^2C^2}}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}-arctg\left(\frac{1}{\omega RC}\right)}$$

$$V_c(t)=\frac{A}{RC}\left[\frac{RC}{\sqrt{1+\omega^2R^2C^2}}\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{2}-arctg\left(\frac{1}{\omega RC}\right)\right)+\frac{-RC}{1+\omega^2R^2C^2}e^{-t/RC}\right]+V_0e^{-t/RC}$$

Resposta a qualsevol entrada (cas ona senoidal)

- Comparant amb el resultat obtingut al tema d'anàlisi transitori amb equacions diferencials

$$V_c(t)=\frac{A}{RC}\left[\frac{RC}{\sqrt{1+\omega^2R^2C^2}}\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{2}-arctg\left(\frac{1}{\omega RC}\right)\right)+\frac{-RC}{1+\omega^2R^2C^2}e^{-t/RC}\right]+V_0e^{-t/RC}$$

$$V_c(t)=\left(V_0-\frac{A}{1+\omega^2R^2C^2}\right)e^{-t/RC}+\frac{A}{\sqrt{1+\omega^2R^2C^2}}\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{2}-arctg\left(\frac{1}{\omega RC}\right)\right)$$

$$V_c(t)=\left(V_0-\frac{A}{1+\omega^2R^2C^2}\right)e^{-t/RC}+\frac{A}{\sqrt{1+\omega^2R^2C^2}}\cos\left(\omega t-arctg\left(RC\omega\right)\right)$$

- I se pot demostrar (exercici)que:

$$\frac{\pi}{2}-arctg\left(\frac{1}{\omega RC}\right)=-arctg\left(RC\omega\right)$$