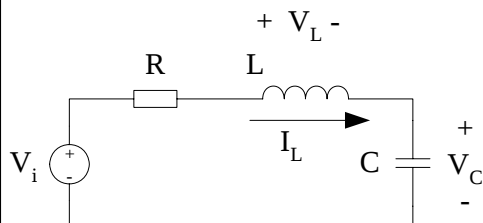


TEMA 6: RESPOSTA TRANSITÒRIA CIRCUITS DE SEGON ORDRE

- **Circuit RLC sèrie**
 - Resposta homogènea (resposta a entrada nul·la)
- **Circuit RLC paral·lel**
 - Resposta homogènea (resposta a entrada nul·la)
- Resposta dels circuits de segon ordre a un esglaió
- Resposta sinusoidal dels circuits de segon ordre

Circuit RLC sèrie

- **Circuit de segon ordre**
 - Conté dos elements de memòria no simplificables a un.
 - 2 condensadors, 2 bobines o 1 bobina i un condensador
 - Els clàssics: RLC sèrie i RLC paral·lel
- **Circuit RLC sèrie**



Condicions
Inicials (2)

$$\begin{cases} V_C(0) = V_0 \\ I_L(0) = I_0 \end{cases}$$

$$LC \frac{d^2 V_C}{dt^2} + RC \frac{dV_C}{dt} + V_C = V_i$$

- La solució dependrà de:
 - R, L i C (paràmetres del circuit)
 - V_i (tensió d'entrada)
 - Condicions inicials

Circuit RLC sèrie

- Cas entrada nul·la (cas homogeni)

$$LC \frac{d^2 V_C}{dt^2} + RC \frac{dV_C}{dt} + V_C = 0$$

$$\begin{cases} V_C(0) = V_0 \\ I_L(0) = I_0 \end{cases}$$



$$V_C(t) = K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t}$$



$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{s_2 V_0 - I_0 / C}{s_2 - s_1} \\ K_2 &= \frac{-s_1 V_0 + I_0 / C}{s_2 - s_1} \end{aligned}$$



$$V_C(t) = \frac{s_2 V_0 - I_0 / C}{s_2 - s_1} e^{s_1 t} + \frac{-s_1 V_0 + I_0 / C}{s_2 - s_1} e^{s_2 t}$$

Circuit RLC sèrie

- Cas entrada nul·la (cas homogeni)

$$V_C(t) = \frac{s_2 V_0 - I_0 / C}{s_2 - s_1} e^{s_1 t} + \frac{-s_1 V_0 + I_0 / C}{s_2 - s_1} e^{s_2 t}$$

- 3 casos depenent del tipus de solucions de l'equació característica (valor del discriminant $\Delta = R^2 C^2 - 4LC$)

- Cas 1

$\Delta > 0$ s_1 i s_2 distints i reals $s_1 = \alpha_1$ i $s_2 = \alpha_2$

$$V_C(t) = \frac{\alpha_2 V_0 - I_0 / C}{\alpha_2 - \alpha_1} e^{\alpha_1 t} + \frac{-\alpha_1 V_0 + I_0 / C}{\alpha_2 - \alpha_1} e^{\alpha_2 t}$$

- solucions normalment negatives (circuitos estables),
- es tracta de dues ones exponencials amb dues constants de temps diferents
- RESPOSTA SOBRESMORTEÏDA

Circuit RLC sèrie

- Cas 2

$\Delta=0$ s_1 i s_2 iguals i reals $s_1=s_2=\alpha$

$$V_c(t) = e^{\alpha t} \left[V_0 - \left(\alpha V_0 - \frac{I_0}{C} \right) t \right]$$

-normalment solució negativa (circuits estables)

-RESPOSTA EN ESMORTEÏMENT CRÍTIC

- Cas 3

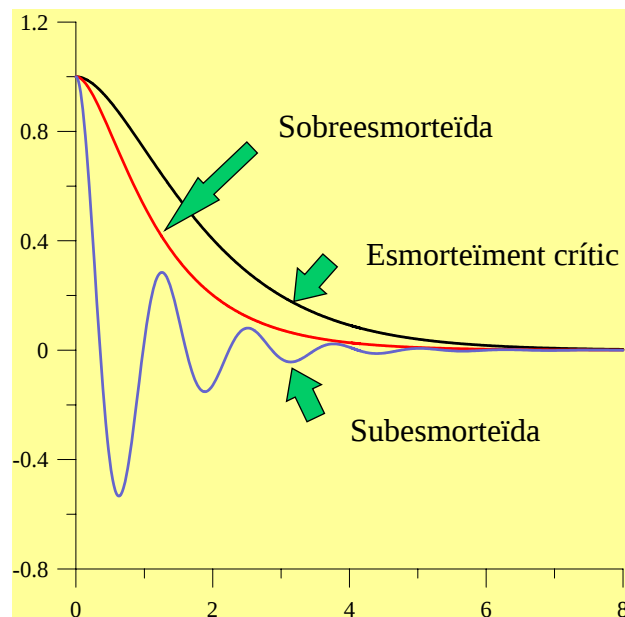
$\Delta < 0$ s_1 i s_2 nombres complexes $s_1=\alpha-j\beta$ $s_2=\alpha+j\beta$

$$V_c(t) = e^{\alpha t} \left[V_0 \cos(\beta t) - \frac{\alpha V_0 - \frac{I_0}{C}}{\beta} \sin(\beta t) \right]$$

-normalment part real negativa (circuits estables)

-RESPOSTA SUBESMORTEÏDA

Circuit RLC sèrie



Circuit RLC sèrie

- Casos no homogenis

- Solució homogènea serà equivalent a la resposta a entrada nul·la, només que les constants es fixaran aplicant condicions inicials a la resposta total, és a dir:

- Solució homogènea

$$\text{Si } \Delta > 0 \quad V_{\text{ch}}(t) = K_1 e^{\alpha_1 t} + K_2 e^{\alpha_2 t}$$

$$\text{Si } \Delta = 0 \quad V_{\text{ch}}(t) = K_1 e^{\alpha t} + K_2 t e^{\alpha t}$$

$$\text{Si } \Delta < 0 \quad V_{\text{ch}}(t) = e^{\alpha t} (K_1 \cos(\beta t) + K_2 \sin(\beta t))$$

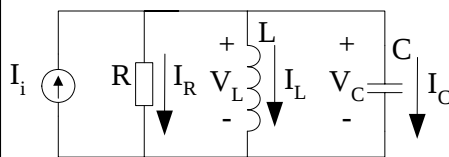
- Solució particular : depèn de la tensió d'entrada V_i (funció de prova)

- Solució total = solució homogènea + solució particular

- Determinació de K 's a partir de condicions inicials aplicant-ho a la solució total

Circuit RLC paral·lel

- Circuit RLC paral·lel



$$\begin{cases} V_C(0) = V_0 = V_L(0) = L \frac{dI_L}{dt} \Big|_{t=0} \\ I_L(0) = I_0 \end{cases}$$

$$LC \frac{d^2 I_L}{dt^2} + \frac{L}{R} \frac{dI_L}{dt} + I_L = I_i$$

- Cas entrada nul·la (cas homogeni)
 - 3 casos depenent del tipus de solucions de l'equació característica (valor del discriminant $\Delta=(L^2/R^2)-4LC$)
- Cas 1 : Resposta sobreesmorteïda

$\Delta > 0$ s_1 i s_2 distintes i reals

Aplicam condicions inicials

EXERCICI!!

$$I_L(t) = K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t}$$

$$I_L(0) = I_0 \quad \text{i} \quad I_L'(0) = \frac{V_0}{L}$$
- Cas 2 : Resposta esmorteïda críticament

$\Delta = 0$ s_1 i s_2 reals i iguals

Aplicam condicions inicials

EXERCICI!!

$$I_L(t) = e^{st} (K_1 + K_2 t)$$

$$I_L(0) = I_0 \quad \text{i} \quad I_L'(0) = \frac{V_0}{L}$$
- Cas 3 : Resposta esmorteïda críticament

$\Delta < 0$ s_1 i s_2 reals i iguals

Aplicam condicions inicials

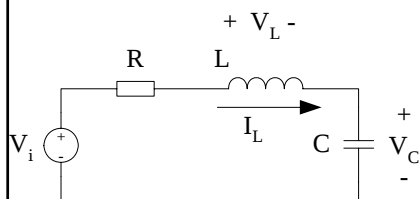
EXERCICI!!

$$I_L(t) = e^{\alpha t} (K_1 \cos(\beta t) + K_2 \sin(\beta t))$$

$$I_L(0) = I_0 \quad \text{i} \quad I_L'(0) = \frac{V_0}{L}$$

Resposta a un esglaó de circuits ordre 2

- Circuit RLC sèrie



Condicions
Inicials (2)

$$\begin{cases} V_C(0) = V_0 \\ I_L(0) = I_0 \end{cases}$$

$$LC \frac{d^2 V_C}{dt^2} + RC \frac{dV_C}{dt} + V_C = V_i = Au(t)$$

Definim :

$$\frac{1}{\omega_0^2} \equiv LC \quad \text{on} \quad \omega_0 \text{ pulsació natural o pròpia}$$

$$\frac{2\xi}{\omega_0} \equiv RC \quad \text{on} \quad \xi \text{ raó d'esmoreïment}$$

$$\frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2 V_C}{dt^2} + \frac{2\xi}{\omega_0} \frac{dV_C}{dt} + V_C = Au(t)$$

Resposta a un esglao de circuits d'ordre 2

- Solució homogènea

$$\frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2 V_C}{dt^2} + \frac{2\xi}{\omega_0} \frac{dV_C}{dt} + V_C = 0$$

$$s = -\xi\omega_0 \pm \omega_0 \sqrt{\xi^2 - 1}$$

– Cas 1 resposta sobreesmorteïda $\xi > 1$

$$\alpha_1 = -\xi\omega_0 + \omega_0 \sqrt{\xi^2 - 1} \quad ; \quad \alpha_2 = -\xi\omega_0 - \omega_0 \sqrt{\xi^2 - 1}$$

$$V_{Ch}(t) = K_1 e^{\alpha_1 t} + K_2 e^{\alpha_2 t}$$

– Cas 2 esmorteïment crític $\xi = 1$

$$\alpha = -\xi\omega_0 \quad ; \quad V_{Ch}(t) = (K_1 + K_2 t) e^{\alpha t}$$

– Cas 3 subesmorteïment $\xi < 1$

$$s_{1,2} = -\xi\omega_0 \pm j\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$$

$$V_{Ch}(t) = e^{-\xi\omega_0 t} \left(K_1 \cos(\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} t) + K_2 \sin(\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} t) \right)$$

Resposta a un esglao de circuits ordre 2

- La solució particular és A. (exercici)

– Si $\Delta > 0$ $\xi > 1$: solució sobreesmorteïda

$$V(t) = K_1 e^{\alpha_1 t} + K_2 e^{\alpha_2 t} + A$$

– Si $\Delta = 0$ $\xi = 1$: solució amb esmorteïment crític

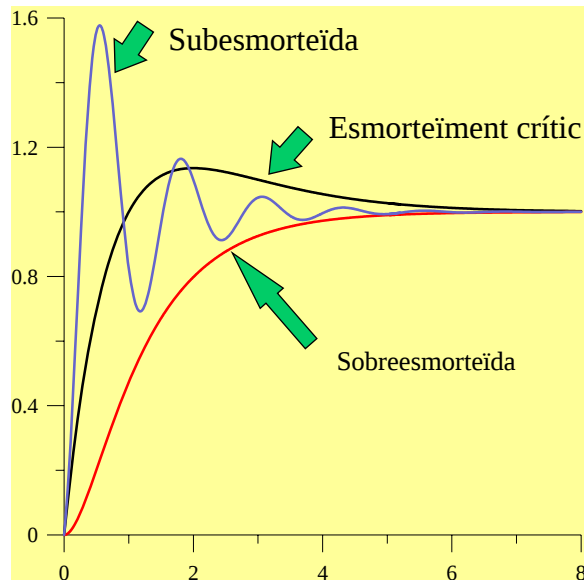
$$V(t) = (K_1 + K_2 t) e^{\alpha t} + A$$

– Si $\Delta < 0$ $\xi < 1$: solució subesmorteïda

$$V(t) = (K_1 \cos(\beta t) + K_2 \sin(\beta t)) e^{\alpha t} + A$$

- Ara fa falta imposar condicions inicials (EXERCICI)

Resposta a un esglaió de circuits ordre 2



Exemple:

$$\alpha_1 = \alpha = -1$$

$$\alpha_2 = -3$$

$$\beta = 5$$

$$A = 1$$

C.I. nul·les

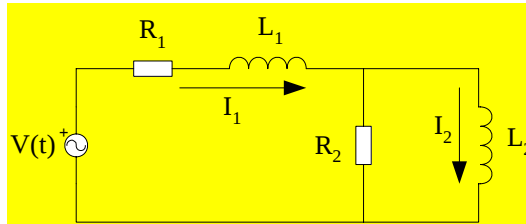
Resposta a un esglaió de circuits ordre 2

- La resposta depèn de :
 - L'Amplitud de la funció d'entrada (tensió d'entrada A)
 - Els valors de les condicions inicials (V_0 i I_0)
 - La pulsació pròpia i la raó d'esmoreïment
 - Que és equivalent a dependre dels paràmetres del circuit R, L, C, ja que només és una redefinició de paràmetres

Resposta a un sinus de circuits ordre 2

- Exemple :

- $R_1=8\Omega$, $R_2=4\Omega$, $L_1=2H$, $L_2=1H$, $V(t)=20\cos(4t)u(t)$, condicions inicials a partir de $t=0^-$
- Calculem $I_2(t)$



- 1) determinem equació diferencial per I_2
- 2) identifiquem freqüència natural i raó d'esmoreïment
 - Determinarem així resposta homogènea
- 3) calculem solució particular
- 4) solució total. Imposen condicions inicials

Resposta a un sinus de circuits ordre 2

