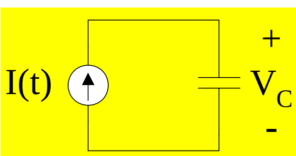
TEMA 5
ANÀLISI DE RESPOSTA TRANSITÒRIA DE CIRCUITS DE PRIMER ORDRE

- Característica entrada-sortida a través de l'equació diferencial
- Circuit RC
  - Estudi de la càrrega
  - Resposta transitòria , resposta permanent i constants de temps
  - Estudi de la descàrrega
  - Aspectes energètics
- Circuit RL
- Comportament de C i L en règim permanent per una entrada esglaó
- Resposta sinusoidal : cas del circuit RC

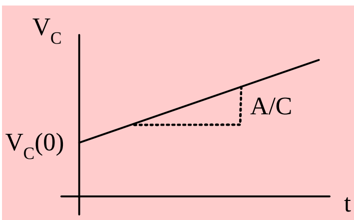
Característica entrada-sortida a través de l'equació diferencial

- Càrrega d'un condensador amb una font de corrent



$$V_C(t) = V_C(0) + \int_0^t \frac{I(t)}{C} dt$$

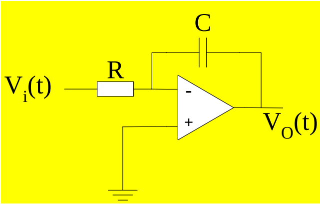
  - Si I(t)=A (corrent constant)



$$V_C(t) = V_C(0) + \frac{A}{C} t$$

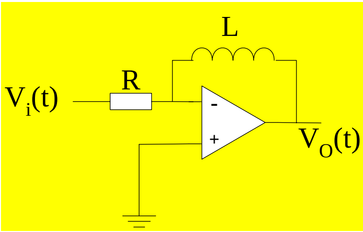
Característica entrada-sortida a través de l’equació diferencial

- Circuit integrador amb un condensador



$$V_O(t) = V_O(0) - \frac{1}{RC}\int_0^t V_i(t)dt$$

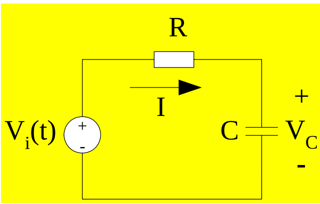
- Circuit derivador amb una bobina



$$V_O(t) = -\frac{L}{R}\frac{dV_i(t)}{dt}$$

Circuit RC

- En general, per a qualsevol tensió d’entrada



$$RC\frac{dV_C(t)}{dt} + V_C(t) = V_i(t)$$

  – Resolució de l’homogènea i de la particular + C.I.

- Cas de V(t) un esglaó (Au(t))
  – Homogènea

$$RC\frac{dV_C(t)}{dt} + V_C(t) = 0$$

$$V_{Ch}(t) = Ke^{-t/RC}$$

  – Particular

$$V_{Cp}(t) = A$$

$$V_C(t) = Ke^{-t/RC} + A$$

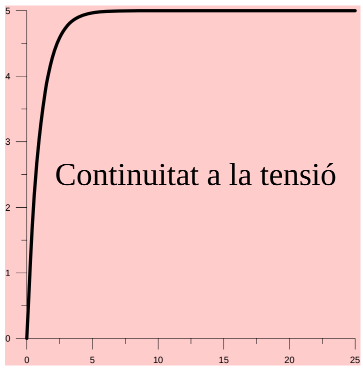
Circuit RC

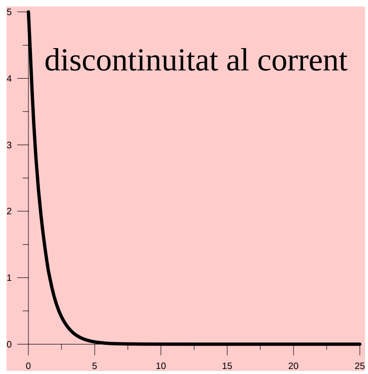
- Condicions inicials : $V_C(0)=V_{C0}$ $\quad I_C(0)=I_{C0}$

$$V_C(t)=(V_{C0}-A)e^{-t/RC}+A \qquad I_C(t)=\frac{-1}{R}(V_{C0}-A)e^{-t/RC}$$

  – El corrent serà :

$$V_C(t)=(0-5)e^{-t/1}+5 \qquad I_C(t)=\frac{-1}{1}(0-5)e^{-t/1}$$

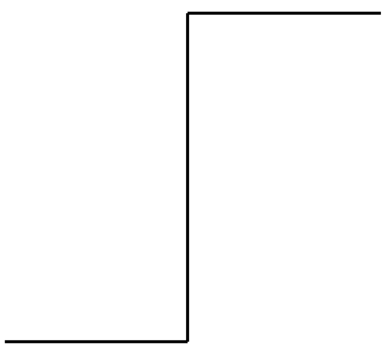


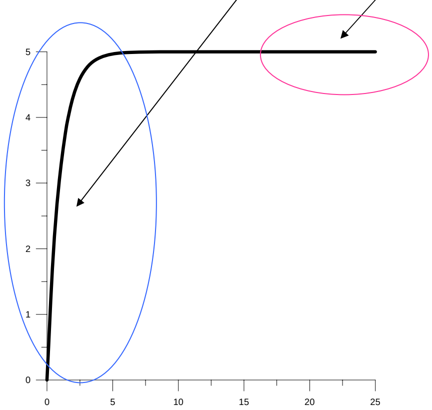


Circuit RC

- Resposta transitòria i permanent (Constants de temps)
  – Transitòria (t infinit es fa nul.la)
    • Constant de temps τ=RC
  – Permanent (es mantén en el temps)

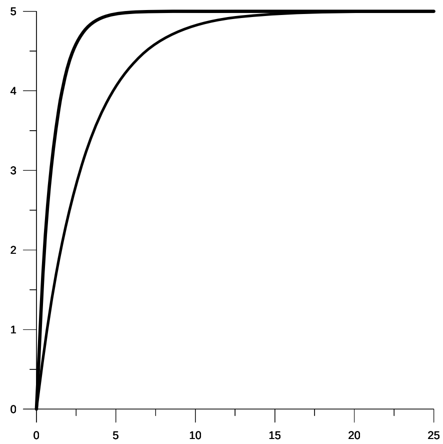
$$V_C(t)=\underbrace{(V_{C0}-A)e^{-t/RC}}+\underbrace{A}$$





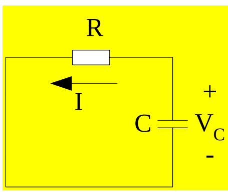
Circuit RC

- Constants de temps. (resposta transitòria i permanent)



Circuit RC

- Estudi de la descàrrega



$$RC\frac{dV_C(t)}{dt}+V_C(t)=0$$

  - Homogènea

$$V_{Ch}(t)=Ke^{-t/RC}$$

  - Condicions inicials

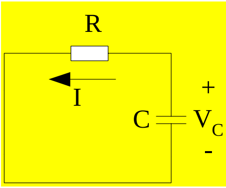
$$V_C(0)=V_{C0}$$

$$V_C(t)=V_{C0}e^{-t/RC}$$

$$I_C(t)=-\frac{1}{R}V_{C0}e^{-t/RC}$$

Circuit RC

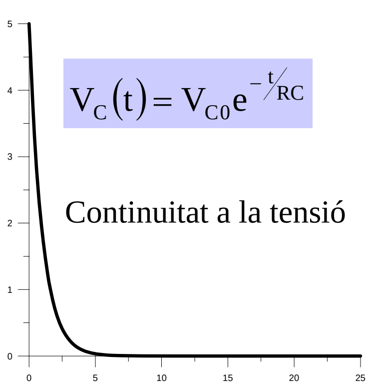
- Estudi de la descàrrega



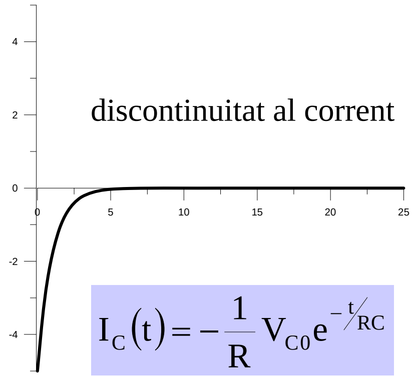
$$RC\frac{dV_C(t)}{dt}+V_C(t)=0$$

$$V_{Ch}(t)=Ke^{-t/RC}$$

$$V_C(0)=V_{C0}$$



$$V_C(t)=V_{C0}e^{-t/RC}$$



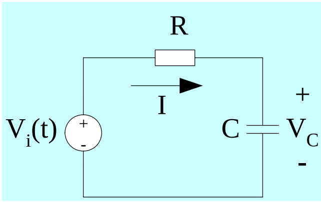
$$I_C(t)=-\frac{1}{R}V_{C0}e^{-t/RC}$$

Circuit RC

- Importància del circuit RC
  - Circuit amb un condensador : equivalent Thévenin + Condensador
- La resposta a un esglaó depèn de:
  - Condicions inicials
  - Constant de temps (RC)
  - Amplitud del senyal d'entrada (esglaó)

Circuit RC

- Aspectes energètics (exemple)
  - Càrrega de 0 a V (Fins a t=infinit))



$$P_{font} = -\frac{V^2}{R} e^{-t/RC}$$

$$P_R = \frac{V^2}{R} e^{-2t/RC}$$

$$P_C = \frac{V^2}{R} e^{-t/RC} - \frac{V^2}{R} e^{-2t/RC}$$

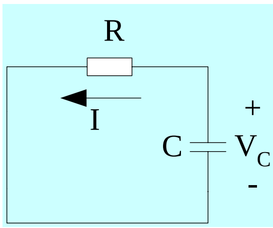
$$E_{font} = -V^2C$$ entregada

$$E_R = \frac{V^2C}{2}$$ dissipada

$$E_C = \frac{V^2C}{2}$$ Dissipada
Guardada a C

Circuit RC

- Aspectes energètics (exemple)
  - Descàrrega, de 5V a 0V



$$P_R = \frac{V^2}{R} e^{-2t/RC}$$

$$P_C = -\frac{V^2}{R} e^{-2t/RC}$$

$$E_R = \frac{V^2C}{2}$$ dissipada

$$E_C = -\frac{V^2C}{2}$$ entregada
Proporcionada per C

Circuit RC

- Aspectes energètics durant un cicle complet càrrega-descàrrega
  - L'energia no depèn de la Resistència
  - L'energia depèn de V i de C
  - Durant càrrega
    - Font proporciona energia
    - La mitat es dissipa (perd a la resistència)
    - L'altre mitat es guarda en el condensador

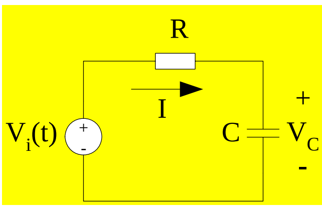
$$E_{font} = -V^2C$$
$$E_R = \frac{V^2C}{2}$$
$$E_C = \frac{V^2C}{2}$$

  - Durant la descàrrega
    - El condensador torna l'energia guardada
    - La resistència dissipa l'energia donada pel condensador

$$E_R = \frac{V^2C}{2}$$
$$E_C = -\frac{V^2C}{2}$$

Circuit RC

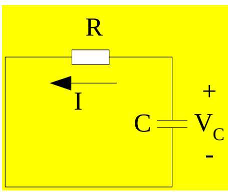
- Aspectes energètics (exercici)
  - De t=0 fins a t=100RC i V=5V



$$P_{font} = -\frac{25}{R} e^{-t/RC}$$
$$P_R = \frac{25}{R} e^{-2t/RC}$$
$$P_C = \frac{25}{R} e^{-t/RC} - \frac{25}{R} e^{-2t/RC}$$

$$E_{font} = 25C\left(e^{-100} - 1\right)$$
$$E_R = \frac{25C}{2}\left(1 - e^{-200}\right)$$
$$E_C = \frac{25C}{2}\left(1 + e^{-200} - 2e^{-100}\right)$$

  - De t=100RC fins a t=infinit
    - t'=t-100RC

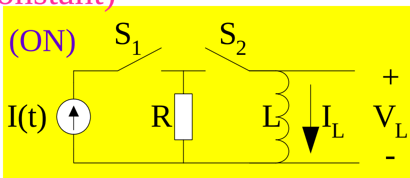


$$P_R = \frac{25}{R}\left(1 - e^{-100}\right)^2 e^{-2t'/RC}$$
$$P_C = -\frac{25}{R}\left(1 - e^{-100}\right)^2 e^{-2t'/RC}$$

$$E_R = \frac{25C}{2}\left(1 - e^{-100}\right)^2$$
$$E_C = -\frac{25C}{2}\left(1 - e^{-100}\right)^2$$

Circuit RL

- Resposta a un esglaó I(t)=A (constant)
  - S_2 es troba ON i a t=0 tancam S_1 (ON)



$$\frac{L}{R}\frac{dI_L(t)}{dt}+I_L(t)=I(t)=A$$

  - Homogènea : $I_{Lh}(t)=Ke^{-Rt/L}$
  - Particular: $I_{Lp}(t)=A$
  - Condició inicial: $I_L(0)=I_{L0}=0$

$$I_L(t)=Ke^{-Rt/L}+A$$

$$I_L(t)=(I_{L0}-A)e^{-Rt/L}+A=I_{L0}e^{-Rt/L}+A\left(1-e^{-Rt/L}\right)$$

Resposta Homogènea (natural)

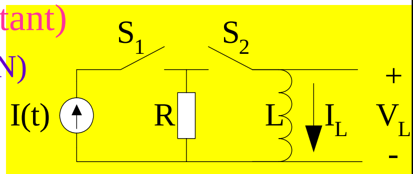
Resposta Forçada (no homogènea)

Resposta a Entrada nul.la

Resposta a Estat nul

Circuit RL

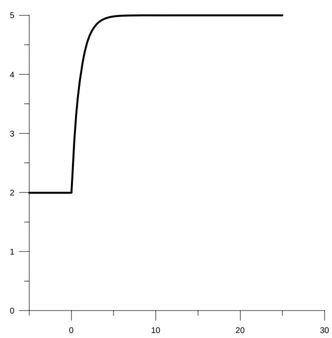
- Resposta a un esglaó I(t)=A (constant)
  - S_2 es troba ON i a t=0 tancam S_1 (ON)

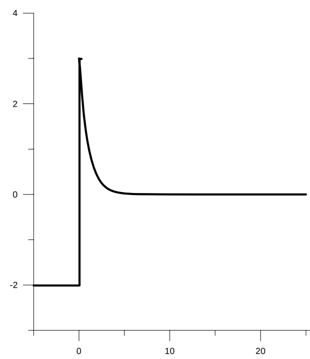


$$I_L(t)=I_{L0}e^{-Rt/L}+A\left(1-e^{-Rt/L}\right)$$

$$V_L(t)=R(A-I_{L0})e^{-Rt/L}$$

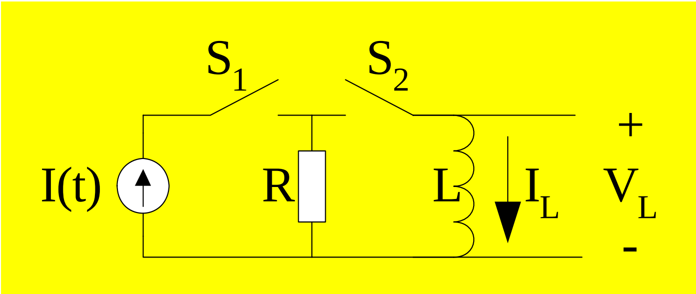
- Cas I_{L0}=2, V_{L0}=-2, R=L=1





Circuit RL

- Resposta a un esglaó I(t)=A (constant)
- Exercici : analitzau la descàrrega
  - O sigui ara S_2 i S_1 es troben ON i a t=0 obrim S_1 (OFF)



Circuit RL i RC

- Es comprova com

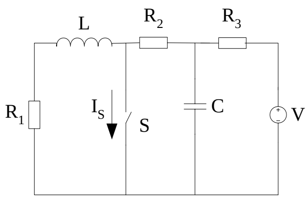
$$V_C(t)=(CI-CF)e^{-t/\tau_C}+CF$$

$$I_L(t)=(CI-CF)e^{-t/\tau_L}+CF$$

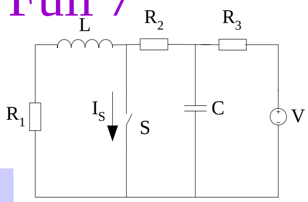
- Càlcul de condicions inicials, amb fonts constants, molt de temps connectat en una situació determinada
  - Condensadors circuits oberts
  - Bobines circuits tancats
  - Exemple (Problema 14-Full7)

14. En el circuit següent a t=0 es tanca l'interruptor. Determinau el corrent $I_S(t)$ per t=0.

Dades V=20V, R_1=10Ω R_2=R_3=5Ω, L=1mH i C=4μF.



Problema 14- Full 7

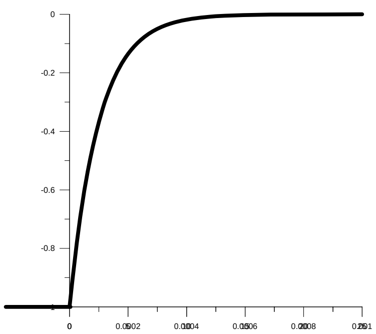


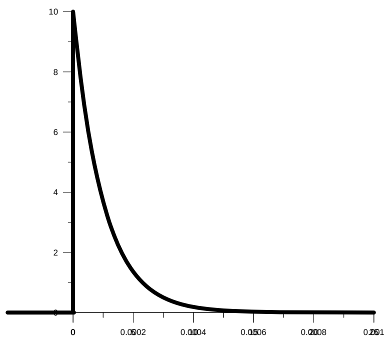
14. En el circuit següent a t=0 es tanca l'interruptor. Determinau el corrent $I_S(t)$ per t=0.

Dades V=20V, R_1=10Ω R_2=R_3=5Ω, L=1mH i C=4μF.

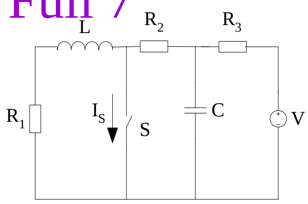
$$I_L(t) = -e^{-10000t}$$

$$V_L(t) = 10e^{-10000t}$$





Problema 14- Full 7

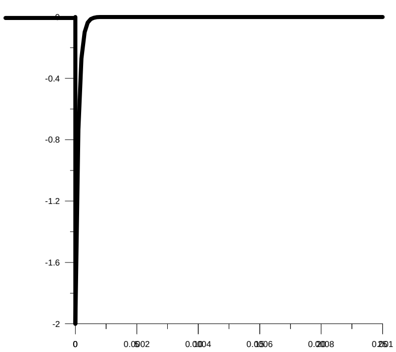


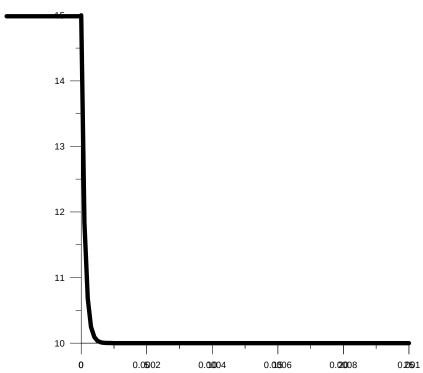
14. En el circuit següent a t=0 es tanca l'interruptor. Determinau el corrent $I_S(t)$ per t=0.

Dades V=20V, R_1=10Ω R_2=R_3=5Ω, L=1mH i C=4μF.

$$I_C(t) = -2e^{-100000t}$$

$$V_C(t) = 10 + 5e^{-100000t}$$

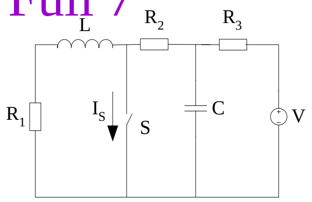




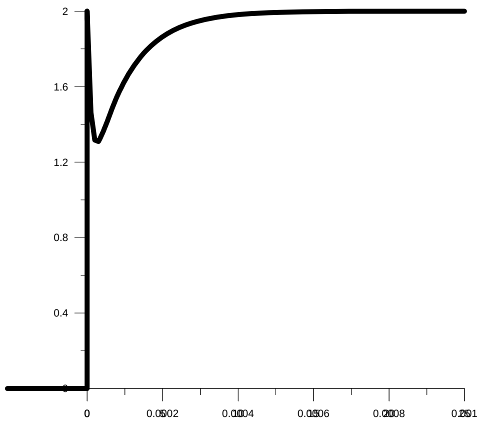
Problema 14- Full 7

14. En el circuit següent a t=0 es tanca l'interruptor. Determinau el corrent $I_S(t)$ per t=0.

Dades V=20V, R_1=10Ω R_2=R_3=5Ω, L=1mH i C=4μF.

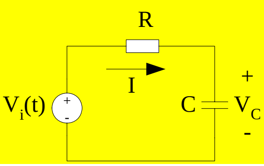


$$I_S(t) = -e^{-10000t} + e^{-100000t} + 2$$



Resposta Sinusoidal : circuit RC

- Entrada de tipus sinusoidal tipus Acos(ωt)



$$RC\frac{dV_C(t)}{dt} + V_C(t) = V_i(t)$$

- Resolució de l'homogènea i de la particular + C.I.
- Homogènea $RC\frac{dV_C(t)}{dt} + V_C(t) = 0$ $\quad V_{Ch}(t) = Ke^{-t/RC}$
- Particular $V_{Cp}(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$

$$a = \frac{A}{1+(RC\omega)^2}$$

$$b = \frac{RCA\omega}{1+(RC\omega)^2}$$

$$V_C(t) = Ke^{-t/RC} + \frac{A}{1+(RC\omega)^2}\cos(\omega t) + \frac{ARC\omega}{1+(RC\omega)^2}\sin(\omega t)$$

Resposta Sinusoidal : circuit RC

- Aplicam ara condicions inicials

$$V_C(t) = Ke^{-t/RC} + \frac{A}{1+(RC\omega)^2}\cos(\omega t) + \frac{ARC\omega}{1+(RC\omega)^2}\sin(\omega t)$$

$$V_C(0) = V_{C0}$$

$$V_C(t) = \left(V_{C0} - \frac{A}{1+(RC\omega)^2}\right)e^{-t/RC} + \frac{A}{1+(RC\omega)^2}\cos(\omega t) + \frac{ARC\omega}{1+(RC\omega)^2}\sin(\omega t)$$

Resposta natural

Resposta forçada

$$\frac{A}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}}\cos(\omega t - \theta) \quad \text{amb} \quad \theta = \text{arctg}(RC\omega)$$

Resposta sinusoidal

- La resposta transitòria a una excitació sinusoidal presenta dues contribucions:
  - Resposta natural
    - S'anula amb el temps
  - Resposta forçada
    - Es mantén en el temps (resposta estacionària o règim permanent)
- La resposta natural presenta forma exponencial
- La resposta estacionària és una ona sinusoidal
  - Amb la mateixa freqüència que el senyal d'entrada
  - Amplitud proporcional a l'amplitud del senyal d'entrada
  - Amplitud i desfase no proporcional amb l afreqüència
  - En definitiva, resposta estacionària és un senyal sinusoidal de mateixa freqüència, distinta amplitud i distinta fase.

Resposta sinusoidal

- Resposta transitòria, estacionària i total