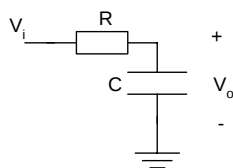


Introducció

- Els circuits amb condensadors (C) i bobines (L) presenten una resposta (amplitud i fase) que depèn de la freqüència dels senyals d'entrada.
- Metodologia per caracteritzar la dependència freqüencial en els senyals de resposta del circuit (tant en amplitud com en fase) basat en mètodes fasorials
 - Funció de transferència,
 - Identificació amb pols i zeros
 - Diagrames freqüencials,
 - Aproximacions de Bode als diagrames freqüencials

Exemple

Sigui el circuit RC



$$V_o = \frac{Z_C}{Z_C + Z_R} V_i = \frac{1/j\omega C}{1/j\omega C + R} V_i = \frac{1}{1 + j\omega RC} V_i$$

Definim com a funció de transferència $\longrightarrow H(\omega) = \frac{V_o}{V_i}$

Així, en aquest exemple $\longrightarrow H(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_p}}$

Pol de la funció de transferència $\longrightarrow \omega_p = \frac{1}{RC}$

Exemple

- Hem trobat una funció de transferència

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_p}}$$

- Amb un pol

$$\omega_p = \frac{1}{RC}$$

- Com representam la funció de transferència ?

– La funció de transferència és complexa i depèn de ω

- Mòdul

$$|H(\omega)|$$

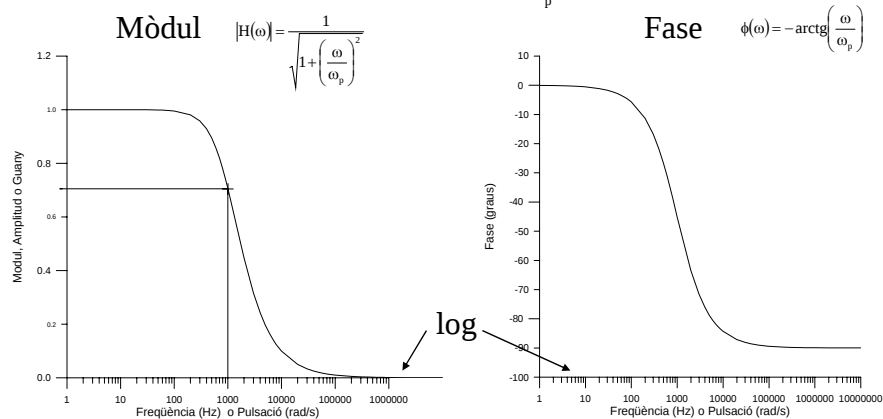
- Fase

$$\phi(\omega)$$

Exemple (En aquest cas $\omega_p = 1000$ rad/s)

- Quina informació ens dona la funció de transferència?

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_p}}$$



Resposta freqüencial :

amplitud i desfassatge de V_o respecte de V_i depenent de la freqüència

Exemple (En aquest cas $\omega_p=1000$ rad/s)

S'acostuma a representar el mòdul en decibels (dB)

$$|H(\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log_{10} |H(\omega)| = 20 \log_{10} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2}}$$

Operant tenim $|H(\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log_{10} 1 - 20 \log_{10} \left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} = -10 \log_{10} \left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2\right)$

Analitzem comportaments asimptòtics

-baixa freqüència : $\omega \ll \omega_p$ $\longrightarrow$ $|H(\omega)|_{\text{dB}} = -10 \log_{10} 1 = 0$ dB

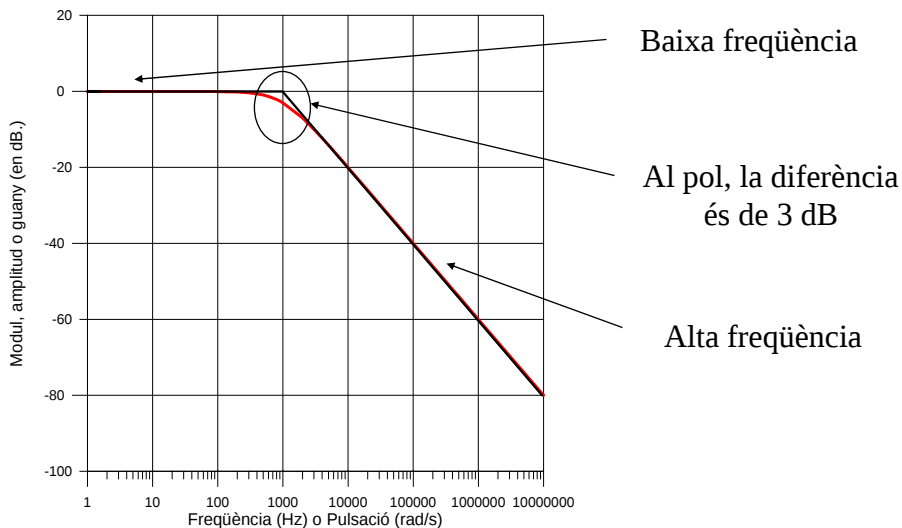
-freqüència del pol : $\omega = \omega_p$ $\longrightarrow$ $|H(\omega)|_{\text{dB}} = -10 \log_{10} 2 \approx -3$ dB

-alta freqüència : $\omega \gg \omega_p$ $\longrightarrow$

$$|H(\omega)|_{\text{dB}} = -10 \log_{10} \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2 = -20 \log_{10} \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right) = -20 \log_{10} \omega + 20 \log_{10} \omega_p$$

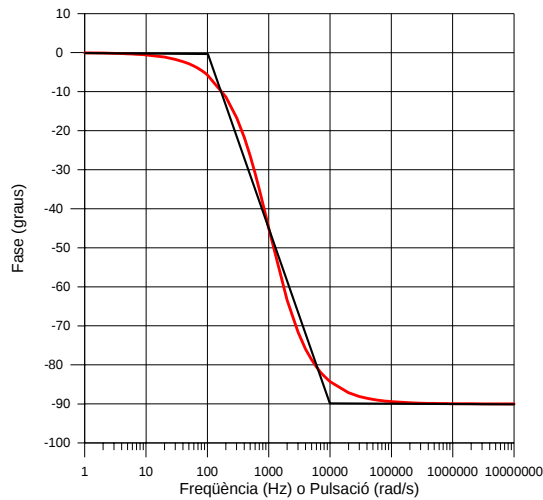
Recta amb pendent -20db/dec

Representació asimptòtica (Bode) vs mòdul $H(\omega)$



Aproximació de Bode : lineal i bastant precisa

Representació assintòtica (Bode) vs fase $\phi(\omega)$



$$\phi(\omega) = -\arctg\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)$$

-baixa freqüència : $\omega < \omega_p$

$$\phi(\omega) \rightarrow 0$$

-freqüència del pol : $\omega = \omega_p$

$$\phi(\omega_p) = -\frac{\pi}{4} = -45^\circ$$

-alta freqüència : $\omega > \omega_p$

$$\phi(\omega) = -\frac{\pi}{2} = -90^\circ$$

Aproximació Bode : caure a $-\pi/4$ per dècada una dècada abans del pol i pujar a $+\pi/4$ per dècada una dècada després del pol

Aproximació de Bode : lineal i bastant precisa

Conclusió : Bode davant un pol

- Bode d'amplitud :

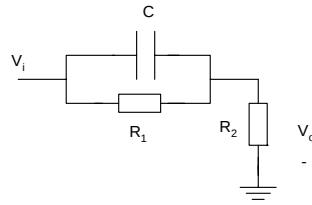
Canviar pendent en -20db/dec a partir del pol (ω_p)

- Bode de fase :

Canviar el pendent en $-\pi/4$ per dec una dècada abans del pol ($0.1\omega_p$)

Canviar el pendent en $+\pi/4$ per dec una dècada després del pol ($10\omega_p$)

Exemple : Circuit amb un zero



$$H(\omega) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{Z_{R_2}}{Z_{R_2} + (Z_{R_1} \parallel Z_C)} = \frac{j\omega R_2 R_1 C + R_2}{j\omega R_2 R_1 C + R_2 + R_1}$$

zero

$$H(\omega) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{1 + j\omega R_1 C}{1 + j\omega \frac{R_1 R_2 C}{R_1 + R_2}} = K \frac{1 + j\frac{\omega}{\omega_z}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_p}}$$

$\omega_z = \frac{1}{R_1 C}$

pol

$\omega_p = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C}$

$K = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$

Exemple: circuit amb un zero. Bode de Mòdul

$$H(\omega) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{1 + j\omega R_1 C}{1 + j\omega \frac{R_1 R_2 C}{R_1 + R_2}} = K \frac{1 + j\frac{\omega}{\omega_z}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_p}} \rightarrow |H(\omega)| = K \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_z}\right)^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2}}$$

$$|H(\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} K + 10 \log_{10} \left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_z} \right)^2 \right] - 10 \log_{10} \left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_p} \right)^2 \right]$$

$$|H(\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} K + 20 \log_{10} \omega - 20 \log_{10} \omega_z - 20 \log_{10} \omega + 20 \log_{10} \omega_p$$

Aproximacions asimptòtiques (Bode)

-freqüència : $\omega \ll \omega_z$ $|H(\omega)|_{dB} \rightarrow 20 \log_{10} K \rightarrow$ recta de pendent constant

-freqüència $\omega_z \ll \omega \ll \omega_p$ $|H(\omega)|_{dB} \rightarrow 20 \log_{10} K + 20 \log_{10} \omega - 20 \log_{10} \omega_z = Q + 20 \log_{10} \omega$

recta de pendent +20db/dec

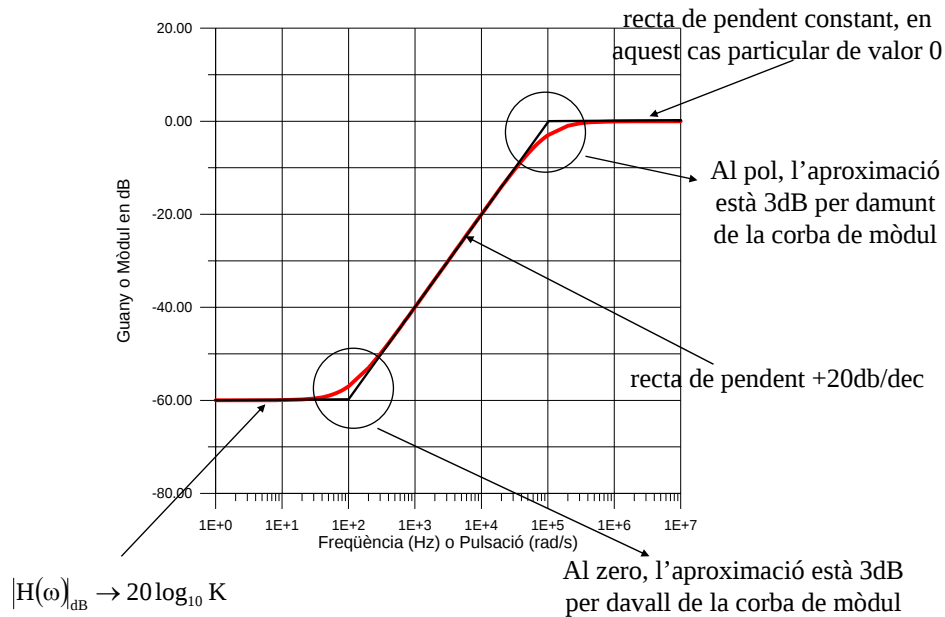
-freqüència : $\omega \gg \omega_p$

$$|H(\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} K + 20 \log_{10} \omega - 20 \log_{10} \omega_z - 20 \log_{10} \omega + 20 \log_{10} \omega_p$$

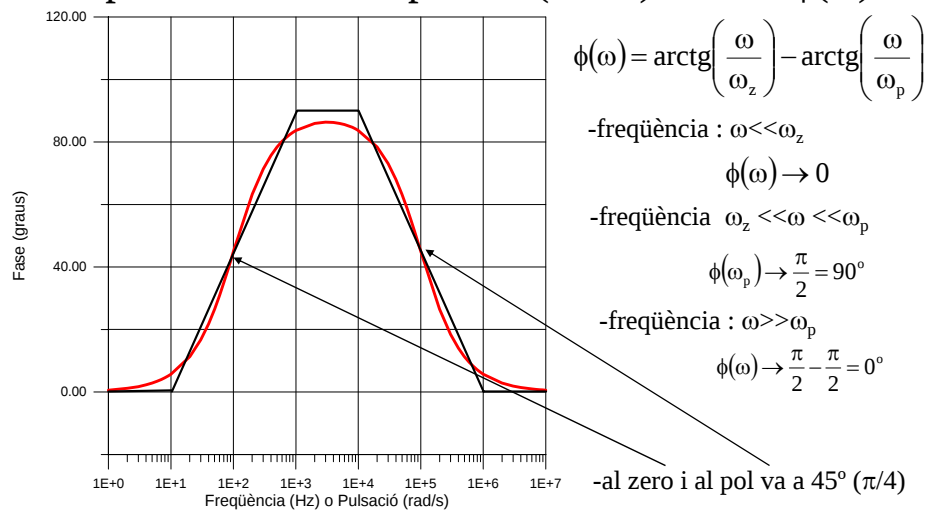
$$|H(\omega)|_{dB} \approx 20 \log_{10} \left[K \frac{\omega_p}{\omega_z} \right] = 0 \rightarrow$$

recta de pendent constant, en aquest cas particular de valor 0

Exemple: circuit amb un zero. Bode de Mòdul



Representació assintòtica (Bode) vs fase $\phi(\omega)$



Aproximació Bode : pujar a $+\pi/4$ per dècada una dècada abans del zero i caure a $-\pi/4$ per dècada una dècada després del zero

Aproximació de Bode : lineal i bastant precisa

Conclusió : Bode davant un zero

- Bode d'amplitud :

Canviar pendent en +20db/dec a partir del zero (ω_z)

- Bode de fase :

Canviar el pendent en $+\pi/4$ per dec una dècada abans del zero ($0.1\omega_z$)

Canviar el pendent en $-\pi/4$ per dec una dècada després del zero ($10\omega_z$)

En general

- Una funció de transferència  una successió de zeros i pols

$$H(\omega) = K \frac{\left(1 + j \frac{\omega}{\omega_{z_1}}\right) \left(1 + j \frac{\omega}{\omega_{z_2}}\right) \cdots \left(1 + j \frac{\omega}{\omega_{z_m}}\right)}{\left(1 + j \frac{\omega}{\omega_{p_1}}\right) \left(1 + j \frac{\omega}{\omega_{p_2}}\right) \cdots \left(1 + j \frac{\omega}{\omega_{p_n}}\right)}$$

- Representació de Bode (amplitud)

- a cada pol

Canviar pendent en -20db/dec a partir del pol (ω_p)

- a cada zero

Canviar pendent en +20db/dec a partir del zero (ω_z)

- Representació de Bode (fase)

- a cada pol

Canviar el pendent en $-\pi/4$ per dec una dècada abans del pol ($0.1\omega_p$)

Canviar el pendent en $+\pi/4$ per dec una dècada després del pol ($10\omega_p$)

- a cada zero

Canviar el pendent en $+\pi/4$ per dec una dècada abans del zero ($0.1\omega_z$)

Canviar el pendent en $-\pi/4$ per dec una dècada després del zero ($10\omega_z$)

- Exemple de resolució
- Pols d'ordre superior
- Zeros d'ordre superior
- Pol a l'origen
- Zero a l'origen