

Equacions deferencials ordinàries amb coeficients constants

- Una equació diferencial relaciona una funció amb les seves derivades

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} f(t)}{dt^{n-1}} + a_{n-2} \frac{d^{n-2} f(t)}{dt^{n-2}} + \dots + a_1 \frac{df(t)}{dt} + a_0 f(t) = g(t)$$

$n \rightarrow$ ordre de l'equació

$a_i \rightarrow$ coeficients constants

$$g(t) \rightarrow \begin{cases} \text{si } g(t) = 0 \rightarrow \text{equació homògena} \\ \text{si } g(t) \neq 0 \rightarrow \text{equació no homògena} \end{cases}$$

- Objectiu : Donada l'equació determinar $f(t)$ tal que compleixi l'equació

Equació diferencial homogènea d'ordre 1

$$\frac{dV(t)}{dt} + aV(t) = 0 \quad \text{Condicció inicial} \quad V(0) = V_0$$

Equació característica

$$\frac{dV}{dt} \rightarrow s \quad V \rightarrow 1$$

$$\begin{aligned} s + a &= 0 \\ s &= -a \end{aligned}$$

$$V(t) = Ke^{-at}$$

K depèn de la condició inicial

$$V(0) = V_0 = Ke^{-a \cdot 0} = K \Rightarrow K = V_0$$

$$V(t) = V_0 e^{-at}$$

Equació diferencial no homogènea d'ordre 1

$$\frac{dV(t)}{dt} + aV(t) = g(t) \quad \text{Condicció inicial} \quad V(0) = V_0$$

- 1-Considerar homogènea i resoldre (sense aplicar C.I.)

$$\frac{dV(t)}{dt} + aV(t) = 0 \quad \xrightarrow{\quad} \begin{matrix} s + a = 0 \\ s = -a \end{matrix} \quad \xrightarrow{\quad} V_h(t) = Ke^{-at}$$

- 2-Considerar no homogènea i resoldre (sol. particular V_p)
– Mètode de funció de prova

$g(t)$	$V_p(t)$
constant	constant
Polinomi grau n	Polinomi grau n
Sin (ωt) ò Cos (ωt)	$A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)$
$Me^{-\alpha t}$	$Ae^{-\alpha t}$



Es substitueix $V_p(t)$ a l'equació i es determinen les constants que fixen V_p

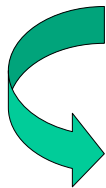


$$V(t) = V_h(t) + V_p(t)$$

- 3- Imposar ara C.I. i fixar constant (de la homogènea)

Equació diferencial homogènea d'ordre 2

$$\frac{d^2V(t)}{dt^2} + a \frac{dV(t)}{dt} + bV(t) = 0 \quad \text{Condicions inicials} \quad V(0) = V_0 \quad \left. \frac{dV}{dt} \right|_{t=0} = V'_0$$



Equació característica $\frac{d^2V}{dt^2} \rightarrow s^2 \quad \frac{dV}{dt} \rightarrow s \quad V \rightarrow 1$

$$s^2 + as + b = 0$$

$$s = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2} = \frac{-a \pm \sqrt{\Delta}}{2}$$

- Cas 1 : $\Delta > 0$ (dues solucions reals)
- Cas 2 : $\Delta = 0$ (una solució real única)
- Cas 3 : $\Delta < 0$ (dues solucions complexes)

- Cas 1 : $\Delta > 0$ (dues solucions reals s_1 i s_2)

$$\longrightarrow V(t) = K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t}$$

- Cas 2 : $\Delta = 0$ (una solució real única s_1)

$$\longrightarrow V(t) = K_1 e^{s_1 t} + K_2 t e^{s_1 t}$$

- Cas 3 : $\Delta < 0$ (dues solucions complexes $s = \alpha \pm \beta j$)

$$\begin{aligned} & \longrightarrow V(t) = K_1 e^{\alpha t} \sin(\beta t) + K_2 e^{\alpha t} \cos(\beta t) \\ & V(t) = e^{\alpha t} [K_1 \sin(\beta t) + K_2 \cos(\beta t)] \end{aligned}$$

- Depenent del cas agafam un o altre tipus de solució
- Aplicam C.I.s i determinam les dues constants K_1 i K_2 que apareixen a la solució

Equació diferencial no homogènea d'ordre 2

$$\frac{d^2 V(t)}{dt^2} + a \frac{dV(t)}{dt} + bV(t) = g(t) \quad \text{Condicions inicials} \left\{ \begin{array}{l} V(0) = V_0 \\ \left. \frac{dV}{dt} \right|_{t=0} = V'_0 \end{array} \right.$$

- 1-Considerar homogènea i resoldre (sense aplicar C.I.)
 - Obtenim solució homogènea $V_h(t)$
- 2-Considerar no homogènea i resoldre (sol. particular $V_p(t)$)
 - Mètode de funció de prova (ja vist abans)
$$V(t) = V_h(t) + V_p(t)$$
- 3- Imposar ara C.I.s i fixar constants de la homogènea (K_1 i K_2)